Sieb Kemme

Taalaspekten van het wiskunde-onderwijs: bewijzen

1. Inleiding

Van januari tot augustus 1983 val ik als leraar wiskunde in aan het Praedinius Gymnasium te Groningen. Gedurende zes uur per week onderwijs ik een tweede en een vierde klas.
Ik neem me voor om me zoveel mogelijk bij de bestaande situatie aan te passen. Dat betekent dat ik volledig zal aansluiten bij het door de sectie wiskunde vastgestelde programma. Voor de tweede klas staat ondermeer het onderdeel "redeneren in de meetkunde" op de rol. Het zal de eerste keer zijn dat de leerlingen zich gaan bezighouden met wat meer formele redeneringen om de waarheid van eenvoudige meetkundige beweringen aan te tonen.
Vanuit taalkundig oogpunt lijkt deze situatie me interessant. Ik ben benieuwd wat voor overtuigingskracht deze manier van bewijzen voor de leerlingen zal hebben. Tot nu toe zijn ze gewend deze overtuigingskracht te ontlenen aan figuren of aan eenvoudige bewerkingen met formules waarin in één oogopslag de waarheid van de bewering is af te lezen.
Nu zullen ze korte redeneringen moeten ontwikkelen die een logische samenhang hebben en waarbij ze gegevens moeten gebruiken die niet direct door de situatie zijn gegeven. Dit stelt nogal wat eisen aan hun taalkundige vermogens lijkt me. Wat zal ik kunnen bereiken met behulp van het bestaande materiaal (Moderne Wiskunde, deel 3HV)? Welke weerstanden zal ik ontmoeten? Op welke manier ontwikkelt zich het leerproces (als er al sprake is van een ontwikkeling)? Het zijn allemaal vragen die me bij het begin van het onderwerp vaag door mijn hoofd spelen. Ik heb ze pas achteraf expliciet opgeschreven.
Deze opstelling als gewone leraar wreekt zich als ik op een "wetenschappelijke" manier deze vragen wil gaan beantwoorden. Ik kan nu geen onderwijsexperimenten uitvoeren die gebaseerd zijn op vragen en doelstellingen. Ik ben zelfs zo dom geweest om tijdens het lesgeven geen schriftelijke aantekeningen bij te houden. Soms heb ik een enkele opvallende leerlingreactie opgeschreven omdat ik bang was die te vergeten. Ik wilde alleen maar leraar zijn, geen onderzoeker. Schriftelijke evaluatie gedurende het lesgeven

Spiegel 3 (1984), nr. 3, 33-54

zou mijn optreden teveel kunnen beïnvloeden. Dat zou de situatie weer te bijzonder maken. Bovendien had ik er gewoon de tijd niet voor. Ik beschik nu dus alleen maar over mijn eigen geheugen en fotokopieën van de gemaakte proefwerken.
Toch heeft mijn leraar-zijn ook vele voordelen naast het alternatief van observator. Ik beschik over een volledig beeld van de onderwijssituatie doordat ik de leerlingen goed ken, actief met de leerstof aan de gang ben geweest en er daardoor de kracht en zwakte van heb ervaren. Bovendien ken ik mijn eigen intenties als leraar en kan ik daardoor achteraf een realistischer interpretatie geven van het gebeuren.

In deze analyse achteraf zal ik proberen te onderzoeken in hoeverre het bewijzen in de wiskunde een bijdrage kan leveren ten aanzien van de redeneervermogens van leerlingen. Allereerst zal ik met behulp van de taalhandelingstheorie van Searle aangeven welke betekenis de taalhandeling "bewijzen" in onze omgangstaal heeft. Vervolgens zal ik die theorie toetsen aan het gegeven onderwijs op school. Dit leidt tot een aantal conclusies die van belang zijn voor de keuze van het lesmateriaal en de activiteiten van de leraar.

2. Taalhandelingstheorie en onderwijs

Het aantrekkelijke van de taalhandelingstheorie van Searle in verband met het onderwijs is dat die uitdrukkelijk uitgaat van de tweezijdigheid in de taalsituatie. Bij de meeste leertheorieën staat de leerling als individu centraal en wordt achteraf uit het falen van de leerlingen conclusies getrokken voor het onderwijsgedrag van de docent. De taaltheorie beschrijft juist die voorwaarden voor het slagen van een taalhandeling in gelijkwaardigheid tussen spreker en hoorder en geeft daarmee mogelijkheden aan om het taalgedrag van leraar èn leerlingen in samenhang te analyseren. De theorie van Searle is natuurlijk het beste terug te vinden in zijn boek Taalhandelingen (1977), een vertaling van Speech Acts (1969). Een mooi overzicht en een verdere uitwerking van de pragmatische taaltheorie staat in Taal en Handelen van Van Dijk (1978). Ook in Appel: Sociolinguistiek (1976) en Tervoort: Psycholinguistiek (1972) staan overzichten, zij het summiere, van de theorie. Het werk van Searle is echter erg theoretisch, taalfilosofisch van aard en heeft geen directe verbinding met onderwijssituaties. Ook verdere uitwerkingen van de theorie (zie: Searle, 1980 en Parret, 1981) hebben dit theoretische en filosofische karakter.
Als toepassing van de theorie zijn inmiddels wel allerlei verbindingen tussen pragmatiek en onderwijs gelegd. Bellack, 1966 en Sinclair, 1975 geven uitgebreide analyses van klassegesprekken in termen van taalzetten tussen leerkrachten en leerlingen. Deze

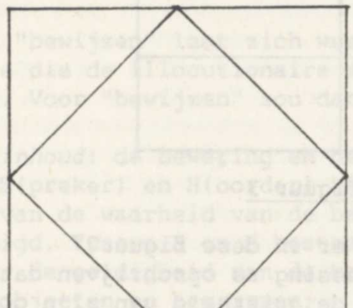
analyses zijn sterk geïnspireerd door de ideeën van Wittgenstein (in zijn Filosofische Onderzoekingen) dat de taal het kenmerk van een spel heeft waarin de deelnemers zetten kunnen doen. Deze studies maken een aantal stereotypen in taalgedrag zichtbaar tussen leerkrachten en leerlingen. De studies zijn erg beschrijvend van karakter en zijn gefixeerd op het onderlinge gedrag van beide partijen. De leerstof speelt eigenlijk geen rol bij de beschrijvingen. Of het nu over geschiedenis of wiskunde gaat, het taalgedrag lijkt hetzelfde te zijn.
Ook in de studie van Reiss (1982) wordt de taalkundige situatie van een aantal wiskundelessen zeer gedetailleerd geanalyseerd met behulp van elementen uit de speech act-theorie. Ze ontdekt een aantal aspecten van taalgedrag die van invloed zijn op de sturing van het leerproces. Met name taalkundige kenmerken van meewerkend- en stoorgedrag van de leerlingen, van overgangen in de les en van procesbegeleidende signalen worden aangegeven. De inhoud van de leerstof schijnt ook hier nauwelijks een rol te spelen. De studie is vooral van sociolinguïstisch belang. Er wordt niet duidelijk hoe leerlingen leren, wèl in welke situatie ze leren en welke sociologische mechanismen daarin een rol spelen.
In mijn vorige artikel (Kemme 1983) over dialogen, heb ik een drietal klassesituaties geanalyseerd waarmee ik heb laten zien hoe de duidelijkheid of onduidelijkheid van de leerstof van invloed kan zijn op dit sociologische gebeuren in de klas.
Willen we echter vanuit taalkundige gezichtshoek het leren bestuderen, dan zullen we ook een theorie over de betekenis tot onze beschikking moeten hebben. Veel, zo niet alles, van wat leerlingen leren hangt namelijk af van de manier waarop ze woorden, zinnen interpreteren. Het aardige van de taaltheorie van Searle is nu dat die ook een theorie over de betekenis bevat. De betekenis van een taalhandeling wordt in de theorie weergegeven met de sociale context waarin die taalhandeling plaatsvindt. De betekenis van "groeten" wordt bepaald door de situatie en de intenties waarin spreker en hoorder zich bevinden. Om de situatie van het leren "bewijzen" te onderzoeken, zullen we dus die elementen van de sociale context moeten opsporen die de betekenis van bewijzen kenmerken en zullen we moeten nagaan in hoeverre de leerlingen dit zullen herkennen. Niet ten aanzien van taalhandelingen in het algemeen, maar via de specifieke taalhandeling "naamgeven", bevat de speech-act theorie ook een theorie over de betekenis van begrippen. Omdat het definiëren en naamgeven van nieuwe begrippen veel in het wiskunde-onderwijs voorkomt, geeft dit element van de theorie mogelijkheden tot analyses van leersituaties waarin naamgeven en definiëren aan de orde is. In Kemme (1981, 1982) heb ik daarvan een uitwerking gegeven.
De verbinding tussen wiskunde-onderwijs en taal vanuit het gezichtspunt van de taalhandelingen, is al veel eerder gegeven door Mannoury in de jaren 1920-1950 in zijn studies in de Signifika (Mannoury 1924, 1930, 1947, 1949). De signifika is ontstaan

vanuit de Engelse taalfilosofie onder leiding van Lady Welby. Met onder andere Fr. van Eeden, L.E.J. Brouwer en Jacob Israël de Haan werd in 1917 een Internationaal Instituut voor Wijsbegeerte opgericht in Amsterdam. In 1922 werd het instituut omgezet in een "Signifische Kring" met een bescheiden werkprogramma. (Mannoury 1949).
In de signifika zijn elementen aan te wijzen die later in de pragmatiek ook een duidelijke rol zullen spelen. Zo hanteert Mannoury de term taaldaad om aan te geven dat we door middel van spreek- (of schrijf-)handelingen proberen invloed op elkaar uit te oefenen en dat daarbij niet alleen de propositionele inhoud maar ook een emotionele lading een rol speelt. Vanuit een betekenistheorie die sterk geënt is op het onderscheid tussen het boven- en het onderbewuste geeft Mannoury een aantal karakteristieken van wiskundige activiteiten. Opvallend is dat telkens de rol van de omgangstaal binnen de wiskunde wordt aangegeven. Voortdurend trekt Mannoury vergelijkingen tussen de betekenis in de omgangstaal en de wiskundige betekenis van allerlei begrippen. Hij geeft de verschillen aan tussen die betekenissen, maar laat ook tegelijkertijd zien hoe ze onderling verbonden blijven in het denken van de wiskundige. Zo merkt hij ten aanzien van het werkwoord "bewijzen" in de wiskunde en de omgangstaal op: "In de laatstgenoemde taal toch betekent "bewijzen": iemand (of misschien zelfs "ieder verstandig mens") overtuigen, dat is, zijn aanvankelijk verzet tegen hetgeen we beweerd hebben door woorden of handelingen doen verdwijnen en voor instemming plaats maken. En van dit alles is bij een wiskundig bewijs (dat dan ook liever "afleiding" moest genoemd worden) geen sprake". (Mannoury, 1930.)
Het wiskundige bewijzen is volgens hem een oefening om te laten zien hoe een bewering ligt opgesloten in daaraan voorafgaande reeds afgeleide beweringen. Juist door dit verschil aan te geven maakt Mannoury duidelijk waar we moeilijkheden bij het leren bewijzen door leerlingen kunnen verwachten.
Over het algemeen zijn de geschriften van Mannoury zeer leesbaar. Zijn ideeën over het wiskunde-onderwijs doen modern aan en zouden gisteren kunnen zijn opgeschreven. Het is verbazend dat hij zo weinig invloed heeft gehad op de didactiek van de wiskunde. Misschien kwamen zijn ideeën daarvoor teveel uit een verdachte, filosofische hoek.
In de volgende paragraaf zal ik de betekenis van de taalhandeling "bewijzen" aangeven door de indicatoren voor spreker en hoorder ervan op te schrijven. Daarbij zal ik uitgaan van de beschrijving die Mannoury heeft gegeven en van twee situaties waarin bewijzen op een heel natuurlijke manier aan de orde is.

3. De taalhandeling "bewijzen"

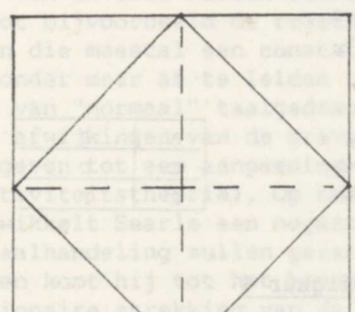
In de schoolmethode Moderne Wiskunde, vierde herziene editie,

staat de volgende opgave (brugklas): "Teken op roosterpapier een vierkant van 10 bij 10. Zoek van elke zijde het midden. Verbind die middens zo met elkaar dat een nieuw vierkant ontstaat. Hoe groot is de oppervlakte van het nieuwe vierkant?"
De figuur komt er zo uit te zien:



figuur 1

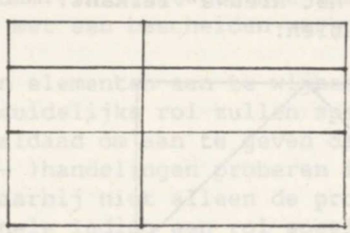
Veel leerlingen meten de lengte van de zijde van het binnenste vierkant. Die is 7, dus de oppervlakte van het nieuwe vierkant is 49.
De leraar zegt: "Ik weet zeker dat de oppervlakte precies 50 is. Hoe zie ik dat?"
Ze hebben de figuur op roosterpapier getekend. Door de lijnen in het papier zien ze dat de oppervlakte de helft van de oppervlakte van het grote vierkant moet zijn.



figuur 2

Het bewijs is geleverd.

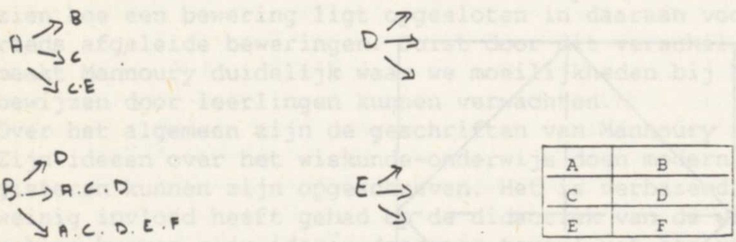
In een experiment naar probleemoplossend gedrag van kinderen dat is uitgevoerd door Balacheff (Balacheff, 1981) bevinden vier leerlingen zich paarsgewijs in een kamertje. De paren zijn van elkaar gescheiden door een wand. Ieder paar wordt geconfronteerd met het volgende probleem:



figuur 3

"Hoeveel rechthoeken zitten er in deze figuur?"
Ieder tweetal moet zijn oplossing zo opschrijven dat het andere tweetal overtuigd raakt van de juistheid van zijn oplossing. Het geheel krijgt daardoor een zeker spelelement.

Pascal (15 jaar) bepaalt dat aantal door te tellen maar zegt daarna: "Hoe kun je dat bewijzen?" Hij gaat vervolgens op zoek naar een structuur die het goede antwoord levert. Hij past tenslotte de volgende redenering toe: "We hebben zes kleine rechthoeken. Omdat we in totaal 18 rechthoeken hebben gevonden moeten er bij iedere kleine rechthoek drie verschillende van het totale aantal te vinden zijn."
Hij maakt daarbij de volgende tekening:



figuur 4

De twee voorbeelden beschrijven situaties waarin "bewijzen" de omgangstaalbetekenis van Mannoury heeft: iemand overtuigen, dat is: zijn aanvankelijke verzet tegen hetgeen we beweerd hebben, door woorden of handelingen doen verdwijnen en voor instemming plaats maken.
Toch is er een duidelijk verschil tussen beide voorbeelden. In het eerste voorbeeld levert de redenering een nieuwe overtuiging op. De leerling denkt dat het antwoord 49 is, de leraar zegt dat

het 50 is en overtuigt de leerling door hem op het spoor van de redenering te zetten. Bij Pascal is de redenering een redenering achteraf die een verantwoording moet leveren voor de tegenpartij van het resultaat van zijn tellerij. Zijn bewijs levert geen nieuwe overtuiging op. Het is hooguit een extra argument dat uitgaat van het gevonden antwoord.

Deze betekenis van "bewijzen" laat zich weergeven met behulp van de lijst van Searle die de illocutionaire strekking van de taalhandeling aangeeft. Voor "bewijzen" zou dat er als volgt uit kunnen zien:

1 *propositionele inhoud*: de bewering en het bewijs;
2 *voorbereidend*: S(preker) en H(oorder) kennen de bewering. S is overtuigd van de waarheid van de bewering. H. is daar niet van overtuigd. Tussen S en H bestaat (impliciete) overeenstemming over de geldigheid van de bewijstechniek en over de aard van de objecten en begrippen;
3 *oprechtheid*: S is overtuigd van de waarheid van de bewering en wil H daarvan overtuigen;
4 *essentie*: de taalhandeling geldt als een speciale vorm van de taalhandeling "overtuigen" doordat de overtuigingskracht ontleend wordt aan argumenten en methodes die voortvloeien uit de bewering zèlf en in overeenstemming met de door S en H geaccepteerde methode van verificatie.

Enige toelichting op deze regels is misschien wel nodig. Fundamenteel idee achter de theorie van de taalhandelingen is de opvatting dat het spreken van een taal gelijk staat met het hanteren van een door regels beheerste vorm van gedrag (Searle, 1969). Deze regels van de taal hebben een constituerende waarde in tegenstelling tot bijvoorbeeld de regels (wetten) van de natuurwetenschappen die meestal een constaterende waarde hebben. Dat verschil valt onder meer af te leiden uit het verschijnsel dat we afwijkingen van "normaal" taalgedrag als "fout" zullen kenmerken, terwijl afwijkingen van de gravitatiewet van Newton aanleiding zullen geven tot een aanpassing van die wet (bijvoorbeeld door de relativiteitstheorie). Op basis van de taalhandeling "beloven" ontwikkelt Searle een negental voorwaarden die het welslagen van de taalhandeling zullen garanderen. Uit een analyse van deze voorwaarden komt hij tot het bovengenoemde viertal punten die de illocutionaire strekking van de taalhandeling aangeven. Daarmee wordt de gedragswaarde van de handeling bedoeld, dat wil zeggen: het effect dat spreker denkt of wil bereiken ten aanzien van het gedrag van hoorder. Dit staat los van de propositionele strekking van de taalhandeling waarin verwezen wordt naar objecten of waarin eigenschappen worden toegekend tussen of aan objecten (referentie en predicatie). Een aantal werkwoorden die illocutionaire handelingen aanduiden zijn bijvoorbeeld: meedelen, beloven, bevelen, groeten, ... Door het viertal kenmerken, indi-

catoren genoemd, wordt nu een beschrijving van de illocutionaire strekking van "bewijzen" gegeven waarin de samenhang tussen propositionele inhoud, spreker en hoorder te herkennen is.
Onder de propositionele inhoud van "bewijzen" verstaan we het geheel van objecten en begrippen en eigenschappen van die objecten en begrippen die in de bewering èn het bewijs aan de orde komen. Het voorbereidende kenmerk beschrijft de situatie tussen S en H voor en tijdens de uitvoering van het bewijzen. De oprechtheid is een indicator voor het effect dat S met zijn handeling bij H wil bereiken. De essentie van "overtuigen" is dat de handeling geldt als een poging om H de waarheid van een bewering te doen inzien. In het algemeen heeft S daarvoor meer middelen tot zijn beschikking dan bij bewijzen. S kan H bijvoorbeeld proberen te overtuigen op grond van zijn vermeende autoriteit op dat terrein. Zo zijn we er allemaal van overtuigd dat de aarde rond de zon draait, hoewel bijna niemand dat ooit door een bewijs geverifieerd heeft gezien.

Met deze keuze van indicatoren wil ik zo dicht mogelijk bij het "bewijzen" in onze dagelijkse omgangstaal blijven. Onder "bewijzen" versta ik dus niet per se een logische keten van ware beweringen met de te bewijzen bewering als laatste, maar versta ik iedere verificatie waarvan de methode door beide partijen geaccepteerd is. Zo kan het nameten van de lengte van de zijde in een figuur een bewijs zijn voor leerlingen *onderling* dat de oppervlakte 49 is.
"Bewijzen" vat ik dus op als een taalhandeling binnen een gemeenschap, waarvan het welslagen afhangt van de taalkundige en sociologische kenmerken van die gemeenschap. De indicatoren beschrijven de betekenis van de geslaagde taalhandeling. In veel gevallen zal H echter het bewijs verwerpen. De oorzaken laten zich uit de indicatoren afleiden:
- H was al overtuigd van de waarheid van de bewering en vindt het bewijs volkomen overbodig.
- H verwerpt de methode van bewijzen (bijvoorbeeld omdat H die niet begrijpt of omdat die methode niet in overeenstemming is met het karakter van de bewering).
- H ontdekt een fout in het bewijs (een onjuist feit, een verkeerde argumentatie of een onvolledige argumentatie).

Naar aanleiding van deze laatste twee oorzaken kunnen de rollen van S en H omdraaien. H zal proberen door middel van kritiek aan te tonen dat het bewijs van S onjuist is en zal het bewijs of de bewering van S vervangen door een ander bewijs of een andere bewering. Ook dit is een regelgeleid gedrag dat uiteindelijk zal leiden tot een uitgebreidere kennis van het onderwerp. Een dergelijke keten van bewijzen en weerleggingszetten wordt door Popper (1963) en in navolging van hem door Lakatos (1976) als essentieel ervaren voor de ontwikkeling van het wetenschappelijke denken.

Deze karakterisering van bewijzen ziet er onnodig ingewikkeld uit. Waarom zul je dat met indicatoren op gaan schrijven, als Mannoury het in één zin weet op te schrijven.
In de eerste plaats heb ik willen laten zien dat je de theorie van Searle kunt hanteren op deze manier, wat de waarde daarvan is zal zich nog moeten bewijzen.
Daarnaast zie je door het gebruik van de verschillende indicatoren toch wat meer structuur in de relatie tussen S en H dan bij Mannoury het geval is. Dit heeft het voordeel dat je gemakkelijker kunt analyseren waar er iets mis gaat àls er iets mis gaat.
Ook hier is nu al kritiek te leveren op de beschrijving zèlf. Zo is "overeenstemming tussen S en H over de verificatiemethode" wel erg ruim gesteld. Zijn alle verificatiemethodes toelaatbaar, als S en H het met elkaar eens zijn? Daarmee zouden we hele idiote "bewijzen" moeten accepteren. Bijvoorbeeld als H de autoriteit van S als voldoende bewijs aanvaardt. Voor het ogenblik heb ik echter genoeg aan deze beschrijving en laat ik een verfijning daarvan graag aan anderen over.

4. Op school

Wat komt er allemaal van die mooie theorie terecht als je voor de klas staat?
Je wilt een begin maken met bewijzen. Je wilt graag dat leerlingen redeneringen leren maken die opgebouwd zijn uit een klein aantal argumenten met een zekere logische samenhang. Daarnaast wil je bereiken dat er een waardeverandering begint op te treden ten aanzien van het waarheidsbegrip. Je zou willen dat de leerlingen op de lange termijn gaan inzien dat iets niet per se waar hoeft te zijn omdat je zelf gewoon vindt dat dat zo is, of omdat een ander dat zegt, of omdat het in de krant staat.
Je vindt dat leerlingen uiteindelijk op school moeten hebben geleerd met hun eigen gezonde verstand naar andermans beweringen te luisteren en die zonodig moeten kunnen weerleggen met behulp van een adequate redenering. Dat is geen doel van het wiskundeonderwijs alleen, maar het wiskunde-onderwijs zou er wel een bijdrage toe moeten kunnen leveren.

Het is gebruikelijk om het leren redeneren in de wiskunde te beginnen met onderwerpen uit de meetkunde. Daar zijn een aantal argumenten voor. Meetkundige eigenschappen laten zich formuleren en bewijzen zonder dat daar veel voorkennis voor nodig is. Je hebt geen ingewikkeld algebraïsch systeem nodig om de zaak op te kunnen schrijven. Het komt erop aan een geschikte keuze van de gegevens te doen en die op een juiste manier in een redenering te combineren. Deze keuze wordt vergemakkelijkt door het visuele aspect: doordat je de hele situatie in één tekening kunt weergeven heb je een beter overzicht. In deze zin staat het redeneren in de meetkunde vrij dicht bij het redeneren in onze dagelijkse omgangstaal. Ook daar leveren vaak fysieke gegevens het materiaal aan de hand waarvan je je argumenten moet kiezen en ordenen.

Hoe ziet nu de relatie tussen leraar en leerlingen eruit waarbinnen het bewijzen voor de leerlingen een betekenis moet gaan krijgen? Probeert de leraar de leerlingen te overtuigen van de waarheid van een bewering? Is er sprake van een overeenstemming over de methode van bewijzen?
Door zo dicht mogelijk bij het boek aan te sluiten, blijf ik ook zo dicht mogelijk bij de situatie die de leerlingen gewend zijn. Het geeft ze veel duidelijkheid (ze weten precies wat ze moeten doen), het geeft ze veel gelegenheid tot zelfwerkzaamheid in de klas (wat deze 2 gymnasiumklas erg op prijs stelt) en het maakt het voor mij ook gemakkelijker (ik hoef niet allerlei teksten en sommen bij elkaar te scharrelen).
Een karakteristiek fragment van deze serie lessen is het volgende:

VOORBEELD 2

ABCD is een vierkant. *P*, *Q*, *M* en *N* zijn de middens van de zijden, zoals dat in figuur 10.9 is aangegeven.

We gaan bewijzen dat de lijnstukken *AM* en *BN* congruent zijn.

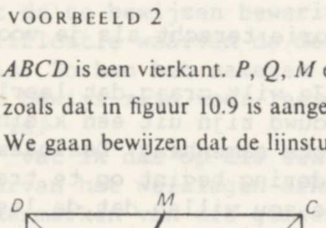


FIG. 10.9

We zoeken een afbeelding waarbij *BN* het beeldlijnstuk is van *AM*.

Zo'n afbeelding is de rotatie om het middelpunt *O* van het vierkant over een hoek van 90°.

Bij deze rotatie geldt:

$$\left.\begin{array}{l} C \to D \\ D \to A \end{array}\right\} \textit{dus } CD \to DA, \textit{ dus} \text{ midden } M \to \text{midden } N$$

Nu kunnen we zeggen:

$$\left.\begin{array}{l} A \rightarrow B \\ M \rightarrow N \end{array}\right\} \textit{dus } AM \rightarrow BN$$

Dus BN is het beeldlijnstuk van AM. Ze zijn congruent.

OPDRACHTEN

1 Neem het vierkant $ABCD$ van figuur 10.9

a. De lijn door P en M is een symmetrieas. We spiegelen in die lijn. Wat is het beeldlijnstuk van AM?

b. Het beeldlijnstuk dat we bij a gevonden hebben beelden we nu af op BN door een tweede spiegeling. Welke lijn moeten we nu als symmetrieas nemen?

c. Waarom zijn de lijnstukken AM en BN nu even lang?

2 Neem nog eens het vierkant van figuur 10.9

a. We spiegelen in de lijn AC.
Volgens welke regel is Q het beeldpunt van M?
Welk lijnstuk is het beeldlijnstuk van AM?

b. Dit beeldlijnstuk willen we afbeelden op BN. Welke spiegeling moeten we dan gebruiken?

3 a. Teken een gelijkbenige driehoek ABC (AC en BC zijn de gelijke zijden)
D is het midden van BC; E is het midden van AC. Trek AD en BE.

b. Je mag bekend veronderstellen: Een gelijkbenige driehoek heeft een symmetrieas. Beredeneer: de lijnstukken AD en BE zijn even lang.

figuur 5

De tekst komt uit Moderne Wiskunde, deel 3 HV. Ik heb de leerlingen gevraagd eerst voorbeeld 2 te lezen en daarna de opdrachten 1, 2 en 3 te maken.
Nu realiseer ik me pas in welke mate de situatie bepaald is door op deze manier het schoolboek te hanteren. In het boek staat een voorbeeld van een redenering die moet aantonen dat twee lijnstukken even lang zijn. Je ziet zo aan de figuur dat dat waar moet zijn. Daar hoef je niet eens voor te meten. Het volgt uit de manier waarop die figuur in elkaar zit. Geen twijfel mogelijk. Bovendien laat die hele schematische redenering zich in één zin samenvatten: als je de figuur een kwartslag draait, komt het ene lijnstuk precies op het andere terecht. Achteraf is het dan ook geen wonder dat Anthea al gauw roept: "wat doen ze toch moeilijk". Ik benadruk dat het er juist om gaat om een redenering te vinden die alleen uitgaat van de gegevens. In opdracht 1 moeten ze hetzelfde nog eens bewijzen, maar dan met behulp van spiegelen. Opdracht 2 is een kleine variatie op opdracht 1, met twee andere lijnstukken. Bij opdracht 3 wordt een andere figuur gevraagd. Ook hier moeten ze weer iets bewijzen wat uit de figuur al overduidelijk is. Om een instrument te geven waaruit duidelijk wordt wat je wel en niet mag gebruiken bij een bewijs, geef ik in de loop van de lessenserie het schema: Gegeven:... Te Bewijzen:... Bewijs: ... Zo heb ik het vroeger zelf ook moeten leren. In de klas is een duidelijke weerstand tegen dit gedoe. Van het schema zie ik niet veel terug, alleen de "brave" leerlingen houden dat nog een les of twee vol. Ik ben daar ook niet consequent mee geweest, het schema mag ook weer geen dwangbuis worden.
Van de essentie van bewijzen zoals dat zo mooi in de vorige paragraaf is opgeschreven, is weinig overgebleven. Het bewijs draagt niets bij aan het overtuigen van de leerlingen. Ze zijn eenvoudigweg al overtuigd. De essentie is hier: achteraf een rechtvaardiging geven van de situatie op een voorgeschreven manier.
Deze andere betekenis van bewijzen is niet vanzelfsprekend voor de leerlingen. Het mooiste brengt Ronald dit onder woorden met: "Dat wéét je toch al, waarom moet je het dan nog eens een keer bewijzen"?
Ook de methode wordt niet zomaar geaccepteerd. Anthea zegt, als ik weer eens het schema op het bord zet: "Wat doet u toch moeilijk, dat zie je toch zo". Er is duidelijk sprake van een incongruentie tussen het visuele karakter van de bewering en de theoretische redenering. Dit is een vreemd en nieuw verschijnsel voor de leerlingen. Ze zien er het nut niet van in zolang ze geen duidelijke voorbeelden hebben gezien dat je het niet anders dan zo kunt bewijzen. Dergelijke incongruenties komen in de wiskunde zeer vaak voor. Geen wiskundige zal zich daar nog over verbazen. Wittgenstein bespreekt er een aantal voor een gezelschap van wiskundigen. Hij heeft daar een beetje de positie van een enfant terrible (Wittgenstein 1976).

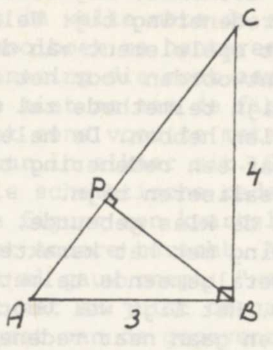
Als we terugkijken naar de situatie van Pascal, dan zien we duidelijke overeenkomsten maar ook verschillen. Ook Pascal is overtuigd van de waarheid van zijn uitkomst, hij zoekt daar echter uit zichzelf een theoretische redenering bij. Wellicht voelt hij zich daartoe gedwongen door het spelelement van de situatie. Hij zal zijn oplossing moeten verantwoorden voor het andere paar en twijfelt er misschien aan of zijn telmethode zal overtuigen omdat die anderen ook wel geteld zullen hebben. De hele situatie nodigt er kennelijk toe uit om achteraf een redenering te geven. In de klas moet zoiets toch ook te realiseren zijn.
In tegenstelling met wat er in de klas gebeurde, is de redenering van Pascal wel in overeenstemming met het karakter van het probleem. Die redenering is een veralgemeende telmethode: bij iedere rechthoek horen er drie andere. Het ligt wel voor de hand dat leerlingen altijd op zoek zullen gaan naar redeneringen die zo dicht mogelijk zullen aansluiten bij het karakter van het probleem zolang ze niet zelf de kracht van de andere onverwachte oplossing hebben ervaren.

Samengevat zien we dat het "bewijzen" zoals het in de klas is gebeurd op geen enkele manier aansluit bij de kenmerken die we zo mooi hebben opgeschreven met behulp van de taalhandelingstheorie van Searle. Bewijzen heeft hier de betekenis van "afleiden": zorg ervoor dat je met behulp van een expliciet gekozen methode laat zien dat deze bewering een gevolg is van een aantal gegevens en al eerder afgeleide beweringen. In deze zin is het bewijzen een ondubbelzinnige voorbereiding op het bewijzen zoals dat onder wiskundigen gebruikelijk is.

5. Het proefwerk

Wat brengen de leerlingen er uiteindelijk van terecht als ze zelfstandig een wiskundig bewijs moeten leveren? Er zijn twee proefwerken gegeven waarin het bewijzen aan de orde komt. Het eerste, in mei, gaat over gelijkvormigheid, het tweede, in juni, over meetkundige transformaties.
Van het eerste proefwerk zal ik de resultaten bespreken van de opgaven 1.a, 1.c en 3, van het tweede proefwerk de resultaten van opgave 2. Dit waren de opgaven waarin bewijzen werden gevraagd. Bij opgave 1.a en 1.c moet bewezen worden dat twee driehoeken gelijkvormig zijn, bij opgaven 3 en 2 dat een figuur van een speciale soort is. Het verschil tussen 1.a en 1.c enerzijds en 3 en 2 anderzijds is dat je de gelijkvormigheid niet uit de figuur af kunt lezen, terwijl je bij 3 en 2 aan de figuur kunt zien van welke soort die is. Dat laatste geeft de waarheid een vanzelfsprekende evidentie. Het is interessant om na te gaan of dit in de oplossingen is terug te vinden.

Opgave 1.a van het mei-proefwerk luidt:



figuur 6

"$\triangle$ABC is rechthoekig. BP staat loodrecht op AC, AB = 3 en BC = 4.
a. Laat zien dat $\triangle$ABP gelijkvormig is met $\triangle$ACB en dat $\triangle$CPB gelijkvormig is met $\triangle$CBA."

Gelijkvormigheid is een theoretisch begrip dat slechts tendele betrekking heeft op de vorm van de figuur. Twee figuren kunnen "van dezelfde vorm" zijn, bijvoorbeeld twee rechthoeken, zonder gelijkvormig te zijn. Voor gelijkvormigheid van twee figuren is het nodig dat ook de verhoudingen in de figuur hetzelfde zijn. Wiskundig wordt dat aangegeven door: de ene figuur moet in de andere kunnen overgaan door een vergroting (of verkleining) in alle richtingen. Bewijzen dat twee figuren gelijkvormig zijn, betekent dan ook: laten zien dat er een dergelijke vergroting (of verkleining) bestaat. Voor twee driehoeken is in het boek afgeleid dat het voldoende is om te bewijzen dat de verhouding tussen de lengtes van de zijden twee aan twee gelijk is, of dat de hoeken in de driehoeken twee aan twee gelijk zijn. Het is opvallend dat geen van de leerlingen zegt dat de driehoeken gelijkvormig zijn omdat ze beide rechthoekige driehoeken zijn (dus gelijk van vorm). Mijn ervaringen bij bijgewoonde lessen op lbo-mavo scholen zijn, dat deze terminologie daar wel aanleiding tot verwarring gaf. In de les is dit probleem aan de orde geweest naar aanleiding van het niet automatisch gelijkvormig zijn van rechthoeken. Bovendien is gelijkvormigheid onmiddellijk gekoppeld aan het zoeken naar zo'n vergroting. Daarmee krijgt het begrip meteen al een heel specifieke betekenis.
De structuur van een bewijs wordt in dit geval gekenmerkt door de keuze van de bewijsmethode (met behulp van de gezochte vergroting, of van de gelijkheid van hoeken, of van dezelfde verhouding van de zijden) en de uitwerking van die methode. Vaak wordt de keuze van de methode niet expliciet gegeven maar is die uit de uitwerking rechtstreeks af te leiden. Bij die uitwerking komt het

erop aan te laten zien welke hoeken of welke zijden van de driehoeken paarsgewijs met elkaar corresponderen. Het bewijs kan dan heel kort zijn, zoals dat van Chiel:

∠APB = ∠ABC

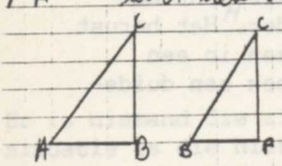
∠~~AC~~ CAB = ∠PAB

2 hoeken gelijk dus ze zij gelijkvormig

figuur 7

De oplossing van Marcel vind ik de mooiste:

1A laat zien dat ABC gelijkvormig is met APB.



← nu heb ik ze in de zelfde stand getekent.

∠B = 90°

∠R = 90°

AC en BC lopen parrallel

∠C = evengroot als ∠C.

↓ van ABC ↓ van BPC

BC loopt parallel met AC

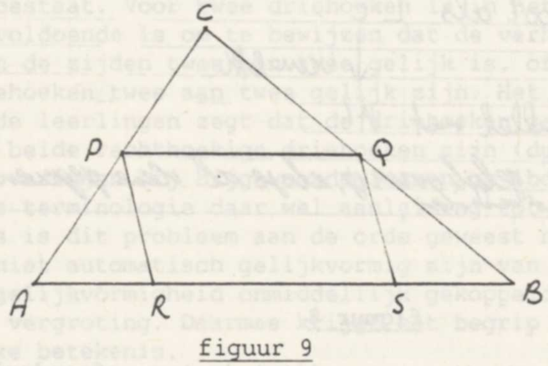
Dus zijn ze gelijkvormig; als je al deze gegeven hebt, kan het niet anders.

figuur 8

Hij is de enige die de figuur opsplitst in twee afzonderlijke figuren. Maar vooral zijn laatste zin spreekt me erg aan. (AC heb ik als verschrijving van PC opgevat.)
Alle andere leerlingen (14) gaan op een of andere manier de mist in. Vier geven alleen maar aan op welke manier je zoiets zou kunnen bewijzen. Zoals: "ABP is gelijkvormig met ABC want ze hebben

de hoeken gelijk", zonder daarbij aan te geven welke hoeken aan elkaar gelijk zijn. Drie keer is de argumentatie onvolledig. Er wordt dan bijvoorbeeld maar voor één paar hoeken aangegeven dat ze aan elkaar gelijk zijn. Daarnaast zijn er een aantal onjuiste feiten. Bijvoorbeeld dat een lijn een hoek middendoor deelt, terwijl dat helemaal niet zo hoeft te zijn. Tenslotte kan het bewijs door een dubbelzinnige notatie in het water vallen. We zien hier dat leerlingen wèl weten wat ze moeten doen om een bewijs te leveren maar dat dat mislukt in de uitwerking daarvan.
Opgave 1.c luidt: "Is △CBP gelijkvormig met △BAP? Waarom?"
Je kunt hier een rechtstreeks bewijs leveren (zoals bij 1.a door middel van de gelijkheid van paren hoeken, of van de gelijkheid van verhoudingen) maar het kan ook met een kort indirect argument. Doordat beide kleine driehoeken gelijkvormig zijn met de grote (zie opgave 1.a), zijn ze ook gelijkvormig met elkaar. Alleen Ellen hanteert dit argument, zelfs vanuit het ongerijmde: "Ja, anders is △CPB niet gelijkvormig met △CBA". Dat is dan ook de enige goeie oplossing. Voor de rest geldt min of meer hetzelfde als bij 1.a: ze weten precies wat ze moeten doen, maar stranden in de uitvoering. In tegenstelling met 1.a is het aantonen van de gelijkheid van de hoeken nu veel ingewikkelder. Het berust uiteindelijk op het argument dat de som van de hoeken in een driehoek samen 180° is, waarbij je voor elke driehoek een duidelijk overzicht van de hoeken moet hebben.

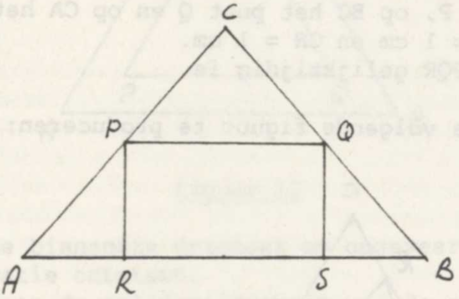
Opgave 3 ziet er heel anders uit.
"3. Teken een driehoek ABC met P als het midden van AC, Q als het midden van BC, R op AB zodat AR=¼ AB en S op AB zodat BS=¼ AB. Wat voor figuur is vierhoek PQRS? Geef een bewijs."
De figuur komt er als volgt uit te zien:



figuur 9

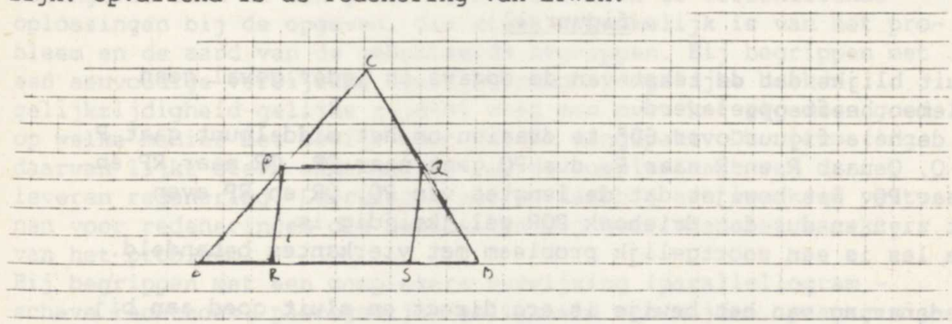
Het meest voor de hand liggende argument gaat als volgt: PQ is een zogenaamd middenparallel van ABC. Dat betekent dat PQ evenwijdig is met AB en dat de lengte van PQ de helft is van die van AB. Nu heeft RS ook die halve lengte want RS = AB - AR - SB = AB -¼AB - ¼AB = ½AB. Dus PQ en RS zijn evenwijdig met elkaar en

evenlang. Daarmee is PQRS een parallellogram.
Het bewijs heeft een ingewikkelder structuur dan de vorige. Dat PQRS een parallellogram is, ziet iedereen. Alleen zijn er nu zoveel mogelijkheden om dat aan te tonen. Bovendien moet je precies weten welke eigenschappen voldoende zijn om te laten zien dat een figuur een parallellogram is. Slechts twee leerlingen produceren een redenering die ook maar een beetje op een bewijs lijkt. Ongeveer de helft begint met een gelijkbenige driehoek te tekenen. Dat levert een rechthoek als figuur op.



figuur 10

Er is niemand die zich realiseert dat dit een heel speciale situatie is die niets bewijst over de algemene situatie. Op zich heb ik er geen moeite mee als ze een bewijs produceren dat dit een rechthoek is, maar daar komt men niet aan toe. Een dergelijk bewijs is trouwens net één stap ingewikkelder dan het parallellogrambewijs, want je moet nog apart laten zien dat hoeken recht zijn. Opvallend is de redenering van Erwin:

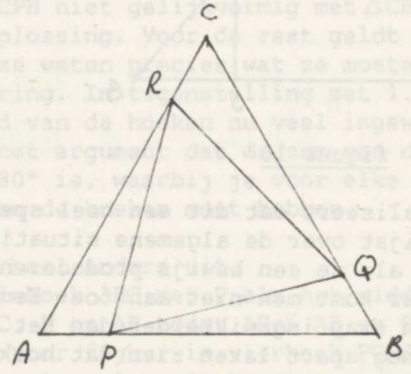


figuur 11

Hij is niet de enige met een dergelijke redenering. Hieruit blijkt dat een parallellogram wordt opgevat als een scheve rechthoek.
Veel bewijzen zijn een willekeurig lijkende opsomming van eigenschappen die zo uit de figuur zijn af te lezen. Er zit geen enkele redenatie of samenhang achter.

Opgave 2 van het juni-proefwerk sluit aardig aan op het fragment uit het schoolboek dat in paragraaf 4 besproken is:
2. Teken een gelijkzijdige driehoek met zijden van 5 cm.
   Teken op AB het punt P, op BC het punt Q en op CA het punt R zodat AP = 1 cm, BQ = 1 cm en CR = 1 cm.
   Bewijs dat driehoek PQR gelijkzijdig is.

Alle leerlingen weten de volgende figuur te produceren:

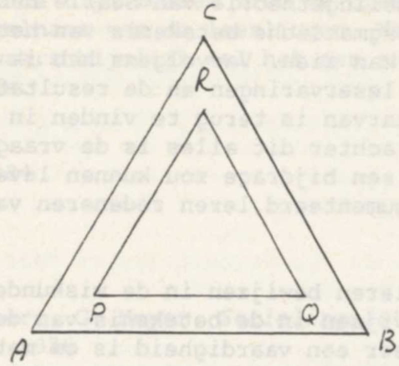


figuur 12

Hieruit blijkt dat de tekst van de opgave in ieder geval geen problemen heeft opgeleverd.
Door de hele figuur over 60° te draaien om het middelpunt gaat P naar Q, Q naar R en R naar P, dus PQ gaat naar QR, QR naar RP en RP naar PQ. Dit bewijst dat de lengtes van PQ, QR en RP even groot zijn en dus dat driehoek PQR gelijkzijdig is.
In de les is een soortgelijk probleem met vierkanten behandeld.

De redenering van het bewijs is erg direct en sluit goed aan bij de visuele interpretatie van de figuur. Toch is er geen leerling die het zo heeft aangepakt. Van de opgave uit het boek is dus weinig blijven hangen. De leerlingen geven drie soorten redeneringen.
- Ze laten zien dat de kleine driehoekjes aan de rand aan elkaar gelijk zijn. Dit is een ingewikkelde, samengestelde redenering. Deze wordt door twee leerlingen tot een goed einde gebracht.

- Ze gaan van de volgende situatie uit:



figuur 13

  en draaien de binnenste driehoek om ongeveer 13°, zodat dan de gegeven situatie ontstaat.
- Ze gaan uit van de gelijkzijdigheid van de oorspronkelijke grote driehoek, waarin in alle drie de zijden hetzelfde gebeurt, zodat het resultaat wel weer gelijkzijdig moet zijn.

In de laatste twee redeneringen zit een "gezond-verstand" element dat meer is dan alleen maar zeggen dat je het zo aan de figuur kunt zien. Ik ben daar wel gelukkig mee, omdat het misschien een begin is naar het leren redeneren op basis van inzicht in de situatie.

Samengevat zien we een groot verschil tussen de verschillende oplossingen bij de opgaven, die sterk afhankelijk is van het probleem en de aard van de gehanteerde begrippen. Bij begrippen met een eenvoudige verwijzing (gelijkvormigheid-gelijke hoeken, gelijkzijdigheid-gelijke zijden) weet men over het algemeen goed op welke manier het bewijs moet worden aangepakt. De uitvoering daarvan lijkt sterk afhankelijk van de complexiteit van de te leveren redenering. Leerlingen zullen daarbij een voorkeur vertonen voor redeneringen die aansluiten bij het (visuele) karakter van het probleem.
Bij begrippen met een complexere verwijzing (parallellogram - scheve rechthoek, paarsgewijze gelijkheid van zijden, paarsgewijze evenwijdigheid van zijden, evenwijdigheid en gelijkheid van één paar zijden) weten de leerlingen niet zo goed wat ze moeten doen en vervallen ze in een willekeurige opsomming van eigenschappen.

6. Conclusies

Met behulp van de taalhandelingstheorie van Searle heb ik proberen aan te geven hoe de pragmatische betekenis van het bewijzen in onze omgangstaal eruit kan zien. Vervolgens heb ik aan de hand van een schoolboek, eigen leservaringen en de resultaten van twee proefwerken bekeken wat daarvan is terug te vinden in het wiskunde-onderwijs. Achtergrond achter dit alles is de vraag in hoeverre het wiskunde-onderwijs een bijdrage zou kunnen leveren in de ontwikkeling van het beargumenteerd leren redeneren van leerlingen.

We hebben gezien dat het leren bewijzen in de wiskundeles nauwelijks aansluit bij het bewijzen in de betekenis van de omgangstaal, maar dat het veel meer een vaardigheid is om met behulp van specifieke methodes de te bewijzen bewering af te leiden uit gegeven premissen. Het bewijs heeft niet de waarde van een overtuiging, maar het is een demonstratie die laat zien hoe de ene bewering een gevolg is van andere. Dat betekent dat we van het wiskunde-onderwijs niet zoveel hoeven te verwachten voor wat betreft het leren beargumenteerd redeneren.

Toch vind ik de situatie niet absoluut hopeloos. Er hangt veel van af wàt we doen in de klas. De twee voorbeelden aan het begin van paragraaf 3 laten zien dat er wel degelijk mogelijkheden bestaan om leerlingen bewijzend bezig te laten zijn in een betekenis die dichter bij de dagelijkse betekenis staat. De voorbeelden zijn de moeite waard om te onthouden. De analyses van de proefwerkresultaten geven verder aan welke factoren een rol kunnen spelen bij de keuze van geschikte situaties in de klas. Het bewijzen dient voor de leerlingen een natuurlijke overtuigingswaarde te hebben doordat het nieuwe argumenten toevoegt aan een bewering die niet volstrekt vanzelfsprekend is en wel op een zodanige manier dat die argumenten in overeenstemming zijn met het karakter van de bewering. Daarnaast zullen we op één of andere manier situaties moeten zien te realiseren in de klas waarbij een dialoog van bewijzen en weerleggingen tussen leraar en leerlingen en tussen leerlingen onderling kan ontstaan. Dat betekent dat we een aantal onderwerpen meer ruimte zullen moeten geven zodat we daar dieper op in kunnen gaan. Bij de stelling van Pythagoras bijvoorbeeld zullen we verbazing moeten zien op te wekken; bijvoorbeeld door middel van de vraag: "Is dat altijd zo?" Niet alleen binnen het meetkunde-onderwijs, ook allerlei wetmatigheden tussen getallen bieden deze mogelijkheden. Op het ogenblik komen die in het onderwijs nauwelijks aan de orde. Bij de keuze van de onderwerpen zullen we heel zorgvuldig moeten letten op het niveau van zowel het probleem als de bewijsvoering. Het probleem moet niet te complex zijn, de bewijsvoering moet in overeenstemming zijn met het karakter van het probleem en moet

vatbaar zijn voor kritiek van de leerlingen zèlf.
Veel zal hierbij echter van de leraar afhangen. Deze zal in de klas de ruimte en de tijd moeten zien te creëren voor een heel eigen, actieve deelname van de leerlingen. Wat dit betreft kunnen wiskundeleraren waarschijnlijk wel het een en ander leren van leraren Nederlands.

Leek, voorjaar 1984

7. Bibliografie

Appel, R., G. Hubers, G. Meyer, *Sociolinguïstiek*. Spectrum, Utrecht, 1976

Balacheff, N., Une Approche Experimentale Pour l'Etude des Processus de Resolution de Problemes. In: *Proceedings of the Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education*, Grenoble, 1981

Bellack, A.A., H.M. Kliebard, R.T. Hyman, F.L. Smith., *The Language of the Classroom*. Teachers College Press, New York, 1966

Dijk, T.A. van, *Taal en Handelen*. Coutinho, Muiderberg, 1978

Kemme, S.L., References as parts of speech acts in the education of mathematics. In: Lowenthal 1982

Kemme, S.L., References of speech acts as characteristics of mathematical classroom conversation. In: *Educational Studies in Mathematics* 12 (1981), 43-58

Lakatos, I., *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1976

Lowenthal, F., F. Vandamme, J. Cordier, *Language and Language Acquisition*. Plenum Press, New York, 1982

Mannoury, G., *Mathesis en Mystiek*. Amsterdam 1924, Utrecht, 1978

Mannoury, G., Een inleiding tot de signifika, inzonderheid met het oog op het onderwijs in de wiskunde. In: *Euclides* 7 (1930), 1, 1-61

Mannoury, G., *Les Fondements Psycho-Linguistiques des Mathematiques*. F.G. Kroonder, Bussum, 1947

Mannoury, G., *Signifika*. Servire, Den Haag, 1949

Moderne Wiskunde, deel 1, vierde herziene editie. Wolters-Noordhoff, Groningen, 1982

Moderne Wiskunde, deel 3 HV, derde editie. Wolters-Noordhoff, Groningen

Parret, H., M. Sbisà, J. Verschueren, *Possibilities and Limitations of Pragmatics*. John Benjamins B.V., Amsterdam, 1981

Popper, K.R., *Conjectures and Refutations*. Routledge & Kegan Paul, London, 1963

Reiss, V., *Die Steuerung des Unterrichtsablaufs*. Peter Lang, Frankfurt am Main, 1982
Searle, J.R., F. Kiefer, M. Bierwisch, *Speech Act Theory and Pragmatics*. Reidel, Dordrecht, 1980
Searle, J. R., *Speech Acts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1969 (Nederlandse Vertaling: Taalhandelingen, Spectrum, Utrecht, 1977)
Sinclair, J. McH., R.M. Coulthard, *Towards an Analysis of Discourse*. Oxford University Press, Oxford, 1975
Tervoort, B.Th., e.a., *Psycholinguïstiek*. Spectrum, Utrecht, 1972
Wittgenstein, L., *Lectures on the Foundations of Mathematics*. Harvester Press, Hassocks, 1976