Sieb Kemme

Taalaspecten van het wiskunde-onderwijs: dialogen

1. Inleiding

Er wordt heel wat afgekletst in een les. Tussen leerlingen onderling maar ook tussen leraar en leerling ontwikkelen zich voortdurend allerlei dialogen. Vaak is daarbij sprake van een confrontatie van de denkbeelden van twee partijen, zoals bij klassieke dialogen het geval was. Je krijgt daarbij de indruk dat het leren zich aan de hand van dat soort dialogen ontwikkelt. Wat natuurlijk niet zo is. Er gebeurt veel meer dan door taal zichtbaar wordt.

Vanuit pragmatische taaltheorieën zijn uitvoerige beschrijvingen en analyses gemaakt van gespreksituaties in de klas. Zie daarvoor Bellack (1966), Sinclair (1975), Reiss (1982). Ook heeft de sociolinguïstiek zich hier mee bezig gehouden. Zie: Stubbs (1976), Appel (1976).
De analyses hebben vooral tot doel het opsporen van intenties van en de invloeden op de taaldaden van leraar en leerlingen. De vakinhoud van de geanalyseerde gesprekken speelt nauwelijks een rol. Je krijgt de indruk dat communicatie in de klas een door regels bepaald gedrag is, waarvan de regels onafhankelijk zijn van de leerinhouden.

In dit artikel wil ik proberen de invloed van een aantal aspecten van de wiskunde aan te geven bij dialoogvormen in het onderwijs. Met name wil ik proberen aan te geven in hoeverre leerlinhouden de dialoog kunnen bepalen. Het is niet mijn bedoeling een volledige theorie over de invloed van leerinhouden op gespreksvormen in de klas te ontwikkelen, ik wil alleen door middel van een drietal voorbeeldsituaties aangeven dat die invloed er is en wil ik in die situaties proberen te achterhalen hoe die invloed tot stand komt. Misschien wordt hierdoor een aanzet gegeven voor verder didactisch onderzoek naar mogelijkheden en onmogelijkheden van de taal bij gespreksvormen in het wiskunde-onderwijs.

Spiegel 1 (1983), nr.3, 57-76

2. Verifiëren

Hoe overtuig je je zelf ervan dat het regent? Door naar buiten te kijken, of je hand uit het raam te steken of ...
Hoe weet je dat de aarde al miljoenen jaar oud is? Door een boek te lezen waarin duidelijk staat beschreven hoe je de ouderdom van fossielen kunt bepalen met de koolstof 14 methode of door dat onderzoek zelf te doen of ...
Hoe weet je dat morgen de zon weer opkomt? Omdat je denkt dat dat zo is of ...
Kennis ontleent haar zekerheid aan de manier waarop ze geverifieerd kan worden. Voor wiskunde is het een norm dat die verificaties aan zekere voorwaarden van objectiviteit en reproduceerbaarheid voldoen. Zekerheid op basis van "omdat ik vind dat het zo is", zonder verdere toelichting, wordt niet geaccepteerd. De status van je kennis moet duidelijk zijn. Het kan zijn dat je hebt aangenomen dat iets zus of zo is (bijvoorbeeld dat er door twee punten precies één rechte lijn gaat) en dat je eigenlijk net zo goed iets anders had kunnen aannemen. In het andere geval dien je duidelijk te maken waar je kennis vandaan komt en hoe je dat geverifieerd hebt.

Een scène in een brugklas.
1 *De leraar (een hospitant) wil duidelijk maken hoe je negatieve*
getallen op elkaar kunt delen. Eerst geeft hij een aantal
voorbeelden met positieve getallen:
"10 : 2 = 5 want 5 . 2 = 10",
5 *en zelfs een formule:*
"a : b = c want c . b = a".
Hij legt duidelijke nadruk op "want". Net alsof hij wil zeggen
dat je het niet anders kunt uitrekenen dan zo. Dan komen er
negatieve breuken op het bord:
10 *"Wat zou er uit* $\frac{-10}{-5}$ *komen?"*
De leerlingen roepen door elkaar: 2,-2.
"Wie kiest er voor 2?"
Een hele bos vingers.
14 *Wie voor -2?"*
15 *Eén vinger. Als hij ziet dat hij de enige is, gaat de*
vinger gauw weer naar beneden.
"Waarom 2?"
Een leerling antwoordt: "Twee minnetjes wordt plus".
Een andere daarop: "Twee plusjes wordt toch geen plus?"
20 *Gelach.*
Nog een andere: "Twee negatieve samen zijn positief".
De leraar: "Ik wil hier iets achter hebben dat ook hierboven
staat", en schrijft op het bord (achter $\frac{-10}{-5} = 2$*):*
"want 2 . -5 = -10".
25 *Nu verschijnt op het bord: "* $\frac{10}{-5} =$ *"*
Ll: "-2".
Lr: "Waarom?"

Ll: "Een negatief en een positief getal wordt een negatief getal."

Lr: "Ja, want -2 . -5 = +10."

Er komt nog een voorbeeld op het bord: " $\frac{-10}{5} =$ *".*

Ll: "-2"

Lr: "Waarom?"

Ll: "-2 . 5 = -10"

Nadat de leerlingen een minuut of tien sommen hebben gemaakt over dit onderwerp, vraagt de leraar weer even de aandacht: "Let eens even op!"

(Jammer, ze waren net zo lekker bezig.)

Op het bord komt: $\frac{0}{5} =$

Ll: "0"

Lr: "Waarom?"

Ll: "Als je niks hebt, hou je niks."

Op het bord: $\frac{0}{1000} =$

Eenstemmig: "0"

Lr: "Maar nu: $\frac{5}{0}$ *(ook op het bord)?"*

Er ontstaat geroezemoes. De verschillende antwoorden vliegen door de klas: 0, 5, -5, kan niet. Er wordt gestemd. Vóór 0 stemmen er tien, drie zijn er voor 5 te vinden, voor "kan niet" ook tien. Blijkbaar is -5 onder de horizon verdwenen. Er zijn nogal wat niet-stemmers. Een "kan niet" antwoord wordt beargumenteerd met: "Je kunt niks van 0 aftrekken".

Op het bord verschijnt: $\frac{5}{0} = 0$*, en daarnaast* $\frac{5}{0} = 5$*.*

Lr: "Als het 0 zou zijn, zou 0 . 0 = 5 zijn. Als het 5 zou zijn ..."

Ll A: "5 . 0 = 5"

Ll B: "O ja? 5 . 0 = 5? Ha, ha!"

Lr: "... zou 0 . 5 = 5 moeten zijn. Dus delen door 0 kan niet."

Ll C: " $\frac{0}{5}$ *kan wel. Als het onderste cijfer 0 is kan het niet?"*

In deze scène komen ogenblikken voor waaruit te zien is dat leerlingen elkaar op allerlei manieren beïnvleoden:

- de jongen laat zijn hand weer zakken als hij ziet dat hij de enige is met het antwoord -2 (15,16),
- elkaars antwoorden worden belachelijk gemaakt (19,20,56),
- er wordt gereageerd vanuit bestaande tradities (42,51).

Voordurend zijn er machtsconflictjes aan de orde en proberen leerlingen niet al te zeer uit de boot te vallen om erbij te blijven horen. Dat er ook leerlingen zijn die zich van dergelijke verdachtmakingen niks aantrekken blijkt uit (21) en (28): het verdachte regeltje komt gewoon weer terug. In dergelijke dialogen spelen allerlei irrationele, sociologisch bepaalde invloeden een rol die zich niet zo gemakkelijk met pragmatische taalregels laten beschrijven.

De leraar wil hier een nieuwe verificatieregel invoeren:
$\frac{a}{b} = c$ want $c.b = a$.

Daarmee wil hij uiteindelijk laten zien dat je niet door 0 kunt delen.
Het is de vraag of hij zijn doel bereikt heeft. Uit de reacties van de leerlingen is dat niet op te maken. Het enige antwoord dat daar een aanwijzing voor zou kunnen zijn is (34). Maar dat kan ook een imitatie zijn van (30) en berusten op een visuele analogie. In (22) wordt die analogie door de leraar expliciet gesuggereerd. Antwoord (50) heeft een concluderende functie.
De leerling formuleert voor zichzelf wanneer deling niet mogelijk is, maar baseert die conclusie op uiterlijke kenmerken en niet op een redenering zoals door de leraar is gepresenteerd. Ook hieruit kun je niet afleiden of het doel bereikt is.
Het fragment wordt gekenmerkt door een grote betrokkenheid en spontaniteit bij de leerlingen. De leraar daagt dan ook uit en geeft er ruimte voor. Je kunt je afvragen of dat wel zo efficiënt is, of je hetzelfde niet met minder inspanning in een kortere tijd kunt bereiken. Voor een analyse van de situatie is die vraag niet relevant en het is alleen maar een voordeel dat er zoveel gebeurt. Het maakt allerlei taalaspecten zichtbaar die anders misschien verborgen zouden zijn gebleven.

Om duidelijk te maken dat je niet door 0 kunt delen, maakt de leraar gebruik van een gedachtenexperiment:
"Stel je voor dat $\frac{5}{0} = 5$ ..."
Diezelfde methode kun je ook gebruiken om te verifiëren wat de uitkomst is van delingen met negatieve getallen:
"Stel je voor dat $\frac{-10}{-5} = 2$, dan moet $2.-5 = -10$."
Het lijkt erop dat de leraar één methode ontwikkeld voor twee verschillende situaties, waarbij het delen door 0 als een soort klap op de vuurpijl moet komen.
Voor de leerlingen is dat niet vanzelfsprekend. Het woord "delen" heeft voor hen de waarde van een handeling. Delen is een werkwoord, het stelt een handeling voor met een uitkomst. Delen doe je. Delen van negatieve getallen doe je net zo als van positieve, alleen met wat extra regeltjes voor de plussen en minnen. Heel aardig is in dit verband de dubbelzinnigheid van (28) en (29). "Een negatief en een positief getal wordt een negatief getal." Bedoeld de leerling hier het resultaat van een deling of van een vermenigvulding achteraf. De leraar interpreteert het als het resultaat van een vermenigvulding (30). Ook in het tweede fragment komt de associatie van het woord "delen" met een handeling heel duidelijk naar voren: $\frac{0}{5} = 0$ "want als je nikts hebt hou je niks".
Delen wordt hier, zoals gebruikelijk op de lagere school, geassocieërd met verdelen. Bij $\frac{5}{0}$ is een dergelijke interpretatie niet meer mogelijk. Verdelen over nul personenen is geen verdelen meer. Bij "je kunt niks van 0 aftrekken" (50), doelt de leerling waarschijnlijk op de handeling: delen is herhaald aftrekken. Alleen interpreteert hij dat net verkeerd om. Dat zou van toepassing zijn

bij $\frac{0}{5}$ en niet bij $\frac{5}{0}$.

Globaal bekeken wordt de dialoog bepaald door een methodenstrijd tussen leraar een leerlingen. Leerlingen verifiëren de juistheid van beweringen over delingen met doe-argumenten. De verificaties zijn gekoppeld met directe handelingen, waarvan de bewering een rechtstreeks resultaat is. Op de lagere school is het rekenonderwijs sterk algoritmisch van aard. Sommen worden gemaakt op basis van heel specifieke handelingsvoorschriften. De uitkomst van de sommen heeft een grote waarde. Waarschijnlijk speelt deze traditie een belangrijke rol in de methodenkeuze van de leerlingen.
De leraar verifieert de juistheid van zijn beweringen met behulp van een gedachtenexperiment. Kenmerkend voor een dergelijke methode is de zinscontructie: "Stel je voor dat ...". Je wilt daarmee zeggen: "verplaats je in de situatie dat de deling $\frac{5}{0}$ zò zou zijn uitgevoerd dat $\frac{5}{0} = 5$". Je verifieert dan met behulp van een werkhypothese, waarbij een beroep wordt gedaan op je inlevingsvermogen. In denkbeeldige situaties. Ook hier is er sprake van traditie. In wiskundestudie zijn dergelijke constructies een onmisbaar element van bijna alle bewijstechnieken. Als je die niet beheerst, haal je eenvoudig weg je kandidaats niet. De leraar is er zò vertrouwd mee geraakt dat hij zich nauwelijks kan indenken dat leerlingen daar moeite mee zouden kunnen hebben.

Voor leerlingen is een dergelijke vorm van "Stel je voor ..." waarschijnlijk nieuw. In "stel je voor dat $\frac{5}{0} = 5$", is sprake van een sterk gereduceerde situatie: je geeft niet aan hoe je 5 als resultaat van de deling $\frac{5}{0}$ zou kunnen krijgen. Voor de redenering op zich is dat natuurlijk helemaal niet belangrijk, alleen het denkbeeldige resultaat speelt een rol, niet de manier waarop dat resultaat tot stand is gekomen. Voor de leerlingen is die manier echter een onderdeel van de betekenis van delen.

Bij het presenteren van een dergelijke situatie ontkom je dus niet aan de manier waarop je $\frac{5}{0}$ zou hebben kunnen uitrekenen.
Bijvoorbeeld door een verhaaltje: stel je voor dat ze op een andere planeet vinden dat $\frac{5}{0} = 5$, omdat je bij delen door 0 eigenlijk niks hoeft te verdelen en er dus 5 moet overblijven, dan moet ...".
Over het algemeen wordt er in het wiskunde-onderwijs weinig expliciete aandacht besteed aan deze manier van verifiëren.
Al doende dienen de leerlingen met de methode vertrouwd re raken.
In Van 't Riet (1980) worden een aantal situaties beschreven waaruit blijkt dat leerlingen daar grote moeite mee hebben.

3. Waarom, waarom?

Om lengtes van lijnstukken ten op zichte van elkaar te kunnen aangeven (bijvoorbeeld dit lijnstuk is twee keer zo lang als dat),

heb je niet genoeg aan de verhouding van alleen maar natuurlijke getallen.
Dit was één van de meest sensationele ontdekkingen van de Griekse wiskunde. Als je een vierkant tekent met een diagonaal erin,

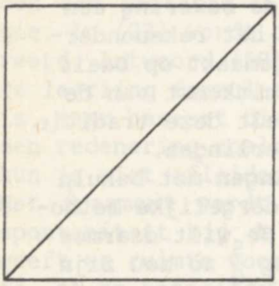


Fig. 1: Een vierkant met diagonaal

dan kun je de verhouding tussen de lengte van de diagonaal en de zijde niet aangeven met een breuk van natuurlijke getallen. De Grieken kenden voor die onmogelijkheid een heel geraffineerd meetkundig bewijs. Tegenwoordig geven we die verhouding aan met $\sqrt{2}$ en noemen we $\sqrt{2}$ een IRRATIONAAL (niet-rationaal) getal. Wat voor de Griekse wiskunde een bijna alles-omverwerpende ontdekking was, wordt door de huidige schoolboeken gepresenteerd als een eenvoudige uitbreiding van bestaande getallenverzamelingen.

§ 4. Irrationele getallen

We hebben in dit hoofdstuk gezien:

Elk rationaal getal (d.w.z. elk getal uit Q) is
a. een eindige decimale breuk, of
b. een oneindige decimale breuk die repeteert.

Er bestaan echter ook *oneindige decimale breuken die niet repeteren.* Een voorbeeld is 0,1 12 123 1234 12345.....
Ook bij zo'n oneindige decimale breuk hoort een oneindige rij inkrimpende intervallen en dus (volgens de stelling in § 3) een punt op de getallenlijn.
Maar bij dit punt kan niet een getal uit Q behoren.

We spreken af, dat we bij zulke punten ook getallen denken, maar dat zijn dan *getallen van een nieuwe soort.*

Deze nieuwe getallen heten irrationale getallen.

Zo'n irrationaal getal is dus te denken als een oneindige decimale breuk die niet repeteert.

Fragment uit een schoolboek

Dat zoiets niet probleemloos hoeft te verlopen is te zien in de volgende scène.

Een 2 atheneumklas. De leraar is weer een hospitant, maar een andere dan in de vorige scène.

Lr: De wortel uit 2. De wortel uit 2, wat zou daar uitkomen Katrien?
K : Kan niet.
Lr: Kan niet. Waarom kan dat niet?
K : ...
Lr: Irene, probeer dit probleempje eens op dezelfde manier op te lossen als je hier gedaan hebt.
I : Eh, stel $\sqrt{2}$ is x ...
Lr: Ja (schrijft op het bord)
I : x^2 is dan 2.
Lr: Ja. en tevens ...
I : x is groter of gelijk aan 0.
Lr: Nou, $x^2 = 2$, als ik nu opschrijf $a^2 = 2$, komt je dit misschien bekend voor?
Reacties: Ja, ja.
Lr: In die les met de rekenmachines hebben we dit gehad hè, wat hadden we toen geconluceerd? Wat weten we dan over het getal a zelf? Fau Long?
F : Het is geen geheel getal.
Lr: Nee, maar wat voor getal is het dan wel?
F : Een eh ... dat weet ik niet.
Lr: Dat weet je niet meer. Linda?
L : Een irrationaal getal.
Lr: Een irrationaal getal. Ja. In die les met de rekenmachine hebben we gezien dat a een irrationaal getal is. Nou wat was a? $\sqrt{2}$. Dus $\sqrt{2}$ is een irrationeel getal volgt hier uit. Ja, Frédérique? (Fr. had haar vinger opgestoken).
Fr: Ik snap er niks van. Waarom is dat nou een irrationeel getal? Waarom?
Lr: Eh, heb je die les toen nog bekeken met ...
Fr: Ja.
Lr: Je bent een paar lessen niet geweest.
Fr. Eentje niet.
Lr: Eentje niet. Nou waarom is dat een irrationaal getal? Frank?
Fk: Nou, het eindigt niet. Achter de komma heb je oneindig veel decimalen.
Fr: Maar hoe weet je dat nou?
Lr: Ja dat is een hele goei vraag. Hoe weet je dat nou? Ik heb nooit laten zien dat a irrationaal is. Ik heb wel een paar voorbeelden gemaakt en gezegd: je kunt wel aanvoelen dat als je breuken in het kwadraat doet, krijg je nooit 2. Maar ik heb het niet echt bewezen dat het een irrationaal getal is. Dat heb ik jullie

maar wijs gemaakt

Fr: Ik snap nog steeds niet: waarom is dat nou zo?

Lr: Waarom is a een irrationaal getal? Je weet wat een irrationaal getal is?

Fr: Ja oneindig.

Lr: Nou, een oneindig decimale breuk die niet repeteert, hé?

Fr: Hm.

Lr: Nou en in die les heb ik gezegd: reken maar eens wat breuken uit, ik weet niet meer welke getallen dat waren, maar er kwam steeds nooit twee uit. Ja. Met allerlei soorten breuken hebben we dat gedaan, toen zeiden we van: nou dan zal het wel irrationaal zijn, $\sqrt{2}$ *of dit getal a.*

Fr: Ik snap nog steeds niet waarom dit zo is.

Lr: Nou het waarom. Dan zou je dat moeten bewijzen. Laten zien dat a irrationaal is. Zo'n bewijs bestaat er ook wel. Misschien wel leuk voor de liefhebbers, het staat zelfs in het boek. Het staat op blz. 160. Dat is een heel oud bewijs, het is zelfs al door de Grieken gegeven. Ja? Maar ik kom straks wel even bij je Frédérique. Dan zullen we het wel even hebben over de lessen die je gemist hebt.

Meisje (tegen Fr.): Waarom vraag je dit allemaal?

Lr: Gert, heb je het begrepen? (Gert zat er nogal afwezig bij.)

G : Nee, niet helemaal.

Lr: Niet helemaal. Wat heb je niet begrepen dan?

G : Ja, hoe je dat uitrekent.

Lr: Hoe je wat uitrekent'

G : Eh dat irrationale getal $\sqrt{2}$.

Lr: Nou die hoef je ook niet uit te rekenen. Het gaat erom dat $\sqrt{2}$ *een irrationaal getal is. Volgende lessen gaan we wel proberen om* $\sqrt{2}$ *uit te rekenen. Ja?*

Het taalgedrag van de leraar zou je op z'n minst zeer onhandig kunnen noemen. Hij lijkt een beetje uit het veld geslagen door het aandringen van Frédérique. In 33 blijkt dat Fr. één les afwezig is geweest. De leraar gebruikt dat gegeven helemaal niet en gaat meteen weer door met zijn irrationale getallen.
In 65 heeft hij het zelfs weer over de lessen die Fr. gemist zou hebben. Zo zijn er nog wel een paar "onhandigheden" aan te wijzen. Bij de bespreking van dit fragment zal ik me echter meer richten op de inhoudelijke onduidelijkheid van de dialoog.

De hele scène speelt zich af rond het begrip irrationaal getal. Voor de leerlingen is dat een denk-object dat gedefinieerd is door een aantal intuïtieve begrippen: *oneindig* decimale breuken die *niet* repeteren, of: wortels uit vergelijkingen (bijvoorbeeld $x^2=2$) die je wel kunt benaderen met je rekenmachine, maar *nooit* helemaal precies kunt uitrekenen. De objecten hebben geen duidelijke fysieke bestaanswaarde, ze zijn zelfs negatief gedefinieerd: niet-eindigende breuken die niet repeteren, of niet-rationale getallen waarvan het kwadraat 2 is (hetgeen wiskundig een malle beperking zou betekenen want er zijn nog veel meer irrationale getallen dan wortels). Om te weten wat $\sqrt{2}$ wèl is, heb je veel meer informatie nodig. Daarvoor zul je eerst uitgebreid met oneindig decimale repeterende breuken gewerkt moeten hebben en zelf een aantal moeten hebben geconstrueerd die niet repeteren. Hier zijn de objecten zo inhoudsloos voor de leerlingen gedefinieerd, dat ze er waarschijnlijk weinig mee kunnen.

Frédérique maakt dankbaar gebruik van de onduidelijkheden om zich tegen de leraar te verzetten. Maar de verklaring voor dit verzet kun je alleen maar raden. Is ze aan het "uitproberen", is ze echt in het onderwerp geïnteresseerd en eist ze een duidelijke uitleg? Ze blijft doorvragen en neemt geen genoegen met de antwoorden van de leraar. Uit regel 67 blijkt dat het gedrag van Frédérique ook niet voor andere leerlingen duidelijk is.

Waarom-vragen kom je vaak tegen in alle mogelijke soorten en vormen van onderwijs. Aan de hand van bovenstaand fragment zal ik proberen een aantal bedoelingen en effecten van die waarom-vragen op te sporen. Juist in dit fragment lijkt het woord "waarom" allesoverheersend. Zowel leraar als leerlingen bestoken elkaar met waarom-vragen.

De eerste waarom-vraag staat in (4): de leraar vraagt naar de uitkomst van $\sqrt{2}$. Katrien zegt dat dat niet kan en vervolgens vraagt de leraar: "Waarom kan dat niet?" Dit begin van de les is een korte herhaling van de voorgaande les waarin leerlingen met behulp van zakrekenmachines hebben geprobeerd een getal te bepalen waarvan het kwadraat 2 is. De waarom-vraag heeft hier de bedoeling om oude kennis op te halen, of terug te denken aan een vroegere (les)situatie. Dat blijkt uit het vervolg waarin de leraar die situatie heel nadrukkelijk aan de orde stelt (13,16,17). De vraag zèlf (4) is hier op dit ogenblik, dubbelzinnig, je zou ook kunnen denken dat hij naar een verklaring vraagt die je ter plaatse zou moeten bedenken.
Katrien geeft geen antwoord. Heeft ze geen verklaring, associeert ze de vraag wel met de vorige les maar kan ze het niet onder woorden brengen?

Frédérique stelt haar klemmende waarom-vraag in (28).
Voorafgaand door "Ik snap er niks van" spitst ze dat onmiddellijk daarna toe op het woord irrationaal.
De vraag is onverwacht, past niet in het op dat ogenblik aan de orde zijnde patroon. Tot nu toe hebben leerlingen alleen maar gereageerd op vragen van de leraar. Frédérique reageert echter volledig op eigen initiatief. Bovendien onderbreekt ze het verhaal.

De leraar is bezig met het repeteren van oude kennis. In eerste instantie ontwijkt de leraar de vraag door te verwijzen naar de vermoedelijke oorzaak van haar niet-weten, daarna speelt hij de vraag door aan Frank. De leraar interpreteert haar vraag als een signaal waarmee Fr. wil aangeven dat ze wat gemist heeft. Dat er meer achter zit, blijkt uit de nadruk waarmee Fr. haar waarom-vraag herhaalt (29).

Frank geeft een wat onduidelijke verklaring. Nu vraagt Fr. door: "maar hoe weet je dat nou?" In het antwoord van de leraar wordt het woord irrationaal gebruikt alsof het begrip al volkomen duidelijk is voor iedereen. Hij zegt: "a is irrationaal omdat je geen breuk kunt vinden waarvan het kwadraat 2 is". Hij suggereert daarmee dat deze procedure een verificatie is van het irrationaal zijn. Maar dat betekent dat "irrationaal" een grondbegrip is dat je moet beheersen vóór je kunt gaan verifiëren of iets onder het begrip valt of niet (als je wilt weten of iets geel is zul je eerst moeten weten wat geel is).
Hierdoor ontstaat een heel verwarde situatie. De procedure "een breuk proberen te vinden waarvan het kwadraat 2 is", is een onderdeel geweest van de definiëring van irrationaliteit. Daaruit is de eigenschap van het oneindig voortlopend zijn, zonder herhaling, als decimale breuk, min of meer afgeleid. Door Frank wordt dat laatste aangegeven als wezenskenmerk van irrationaliteit. Irrationaliteit slaat op een specialisatie van hem bekende objecten (decimale breuken) net zo als geel een speciale kleur is en het "kleur zijn" van geel een wezenskenmerk is.

Fr. herhaalt haar vraag in (46) met de toevoeging: "ik snap het nog steeds niet". Wat voor antwoord verwacht ze nu? Wil ze een uitleg horen van het woord "irrationaal"? Wil ze een rekenpartij zien waaruit blijkt hoe je $\sqrt{2}$ als oneindig decimale breuk kunt uitrekenen?

In (47) herhaalt de leraar haar vraag en vervolgt met een interpretatie door de aandacht op het woord "irrationaal" te richten (49). Hij kaatst daarmee de bal terug waarbij Fr. wel gedwongen wordt in zijn interpetatie mee te denken. Fr. komt er ook niet uit. Is haar antwoord een herhaling van de opmerking van Frank, of heeft ze al eerder de klok horen luiden? De leraar vult Fr. zelf aan door het volledige kenmerk van irrationaliteit te geven. "Hm", zegt Fr. Toch gaat de leraar door. In (58) zegt Fr. dat ze het nog steeds niet snapt. Dan verandert de leraar van tactiek (59). Hij interpreteert het voordragen van Fr. als een vragen naar een bewijs en verwijst naar iets dat op dat ogenblik onbereikbaar is voor de leerlingen. Bovendien snoert hij Fr. de mond door te zeggen dat ze straks samen de lessen zullen doornemen die ze gemist heeft.

In (67) staat een heel andere waarom-vraag. Fr. wordt daarmee door een medeleerlinge min of meer ter verantwoording geroepen over haar ongebruikelijke gedrag.

Misschien heeft Gert (17) dezelfde moeilijkheden als Fr. maar kan hij het beter onder woorden brengen: "Ik weet niet hoe je $\sqrt{2}$ uitrekent".

De omschrijving van Gert geeft aan dat het begrip $\sqrt{2}$ zich op een grondniveau bevindt. Getallen zijn voor hem objecten waar je mee rekent, ze hebben een welomschreven uiterlijke verschijningsvorm: breuken, cijfers en combinaties daarvan met eventuele min-tekens, kommagetallen. $\sqrt{2}$ daarentegen is een symbolosche notatie die een bundeling van eigenschappen aangeeft van een denkbeeldig getal: dàt getal waarvan het kwadraat 2 is.
Leerlingen kunnen zich daar aanvankelijk niets bij voorstellen. In proefwerken willen ze $\sqrt{2}$ het liefst vervangen door een concreet getal, ook als nadrukkelijk gesteld is dat je $\sqrt{2}$ mag laten staan en als de vervanging meer rekenwerk geeft. Pas nadat ze hebben leren rekenen met wortels ontstaat er wat meer zicht. Wortels zijn dan echter heel eigen objecten geworden met een eigen grammatica, waarvan de verbinding met andere getallen maar heel zwak is. Rekenen met een zakrekenmachine speelt zich meestal op een dergelijk grondniveau af. Mogelijkheden om dat niveau te ontstijgen, ontstaan er als er iets merkwaardigd gebeurt. Bijvoorbeeld als je $\sqrt{-2}$ zou proberen uit te rekenen. Je kunt je dan afvragen wat er misgaat. Via de eigenschap dat kwadraten altijd positief zijn, kom je dan tot de ontdekking dat het onmogelijk is om wortels uit negatieve getallen te trekken. Op dat ogenblik beweegt je denken zich op een ander niveau: in plaats van met de objecten zèlf redeneer je aan de hand van eigenschappen van objecten. Waarom-vragen zijn de sleutel-vragen die een dergelijk redeneren op gang kunnen brengen.

Waarom-vragen zijn vragen achteraf. Ze worden gesteld nadat er iets gebeurd is dat niet vanzelfsprekend is. Waarom-vragen initiëren een verklaring van die gebeurtenis. In ons geval was dat:
- de ongelijkheid in niveaus tussen twee begrippen ($\sqrt{2}$ en irrationaliteit);
- het onduidelijke gedrag van de leraar;
- het onduidelijke gedrag van Fr.

Samengevat kun je stellen dat dit fragment bepaald wordt door een tweetal latent aanwezige conflicten:
- een conflict tussen het denken en taalgebruik van de leraar en dat van de leerlingen: door een koppeling van twee begrippen $\sqrt{2}$ en irrationaliteit, die alleen maar te begrijpen valt als het wortelbegrip op een ander niveau beheerst wordt, ontstaat een kloof van onverstaanbaarheid;

- een conflict tussen de verwachtingen van Fr. en de leraar: Fr. verwacht een duidelijke uitleg op dat ogenblik, de leraar verwacht dat Fr. zelf de gemiste les(sen) heeft ingehaald, of zich tevreden stelt met een schetsmatige uitleg omdat ze lessen gemist heeft.

Opvallend in dit fragment is dat het stellen van waarom-vragen van Fr. haast werkt als een parodie op het voortdurend waarom-gevraag van wiskundeleraren. In het wiskunde-onderwijs worden waarom-vragen gebruikt omdat ze te dwingen tot het doordenken van de feiten en leerlingen op een spoor kunnen zetten naar een andere kijk op de zaken. Je moet er wel tegen kunnen om voortdurend met waarom-vragen bestookt te worden. Het vooronderstelt een wetenschappelijke houding om door te vragen naar grondprincipes, redeneringen in logische stappen uiteen te rafelen of op te stellen, verantwoordelijkheid durven afleggen over je aannames, enz... Het eist ook een kritische grondhouding ten aanzien van je eigen gedrag: op je hoede zijn voor cirkel-redeneringen, logische misstappen, fouten in berekeningen, enz... Dit gaat veel veder dan het natuurlijke "waarom" van kinderen. Dat is gebaseerd op verbazing over opvallende verschijnselen of op direct eigen belang.

Helaas wordt er weinig gedaan in het onderwijs om die kritische grondhouding te ontwikkelen. Men gaat er eigenlijk gewoon van uit dat leerlingen die houding al hebben. Daarom zou je eigenlijk erg gelukkig moeten zijn met de "waarom"-vragen van Frédérique.

4. Kiezen en uitvoeren van procedures

Als je een computer een bepaald probleem wilt laten oplossen, zul je eerst een geschikte manier moeten bedenken waarop die machine het probleem te lijf kan gaan vóórdat de berekening ook daadwerkelijk uitgevoerd kan worden. Dit geeft aan dat er twee fasen zijn in dit proces van het probleem-oplossen:

- het kiezen van de (geschikte) programma's;
- het uitvoeren van die programma's.

Deze situatie kan min of meer model staan voor leersituaties waarin leerlingen probleem-oplossend bezig zijn. Ook dan is er sprake van de keuze èn de uitvoering van een programma waarmee het probleem kan worden opgelost. Het is echter gebruikelijker om over oplossingsstrategieën of -procedures te praten over programma's. Kortheidshalve zal ik hier het woord "procedures" voor reserveren. Daarmee bedoel ik de manier waarop problemen worden aangepakt. Door deze analogie wil ik niet het leren gelijk stellen aan het programmeren van computers, integendeel, leerlingen zullen ook moeten leren zelf procedures te kiezen voor het oplossen van problemen. Zover hebben computers het nog niet geschopt.

Het is niet zo dat deze fasen strikt chronologisch zijn gescheiden. Een probleem kan bijvoorbeeld zo'n sterke signaalwerking hebben ten aanzien van de oplossing, dat je al aan de uitvoering van de procedure bent begonnen zonder dat je over de keuze van die procedure hebt hoeven nadenken. Het kan ook zijn dat je min of meer op de gok voor een bepaalde procedure kiest, om tijdens de uitvoering daarvan tot de ontdekking te komen dat de keuze niet juist was en je je dan pas bewust gaat afvragen joe je het probleem wèl kan aanpakken. Dat houdt in dat je ook voortdurend tijdens de uitvoering evaluerend bezig bent ten aanzien van de effectiviteit van de procedure.

Bij het probleem-oplossen werk je dus op twee niveaus:
- het procedurele niveau: denken over (de keuze en de effectieve waarde van) de procedure, (de procedures zelf zijn object van het denken);
- het handelingsniveau: werken aan (de uitvoering van) de procedure (de procedure wordt uitgevoerd).

In het onderwijs zul je die twee niveaus terugvinden.
Als je van leerlingen eist dat ze zelfstandig bepaalde problemen kunt oplossen, eis je ook van ze dat ze over oplossingsstrategieën kunnen nadenken.
Ieder niveau vraagt andere denk-technieken. Het denken op het procedurele niveau kun je "horizontaal" denken noemen. Het betekent dat je denkt in alternatieven die min of meer naast elkaar staan, gelijkwaardig zijn ten opzichte van de probleemstelling. Het "verticale" denken slaat vooral op het uitvoeringsniveau waarin je de gekozen procedure doorrekent. Horizontaal denken eist een gevoeligheid voor analogieën, een open staan voor nieuwe, onverwachte invallen en de beschikking over een waarderingssysteem voor de effectiviteit van oplossingsstrategieën.
Verticaal denken vereist een zekere discipline en overzicht over het gekozen pad.

Het bovenstaande wordt weerspiegeld in de dialoog tussen leraar en leerling(en) waarin je twee soorten informatie kunt tegenkomen:
- de procedurele informatie over de procedure;
- de handelingdinformatie over de uitvoering.

In een 4 atheneum-klas wordt het huiswerk besproken over het begin van "kansrekening" waarbij leerlingen met tel-problemen zijn geconfronteerd.

Opdracht 78: JEROEN BOSCH.

Hoeveel keer lees je hier JEROEN BOSCH?

```
a.                J                 b.             J
               E     E                          E     E
            R     R     R                    R     R     R
         O     O     O     O              O     O     O     O
      E     E     E     E     E              E     E     E
   N     N     N     N     N     N              N     N
      E     B     B     B     B                    B
         O     O     O     O                    O     O
            S     S     S                    S     S     S
               C     C                          C     C
                  H                                H
```

Uit de bespreking van opgave b:
Lr: Hoeveel manieren zijn er om van de J naar de B te komen?
Maarten: Twintig.
Lr: En hoeveel van de B naar de H?
M : Ik heb gelijk meteen doorgeteld.
Lr: Dat kan. Bij die O, wat heb je daar staan?
M : Ook 20.

Zo wordt doorgeteld tot 120. Op het bord komt:

```
         20
      20    20
   40    40    40
      60    60
         20
```

(De getallen stellen het aantal mogelijkheden voor dat Maarten heeft gesteld vanaf B om bij H te komen.)
Een aantal leerlingen heeft het anders gedaan: er zijn 20 manieren om van de J naar de B te komen, en 6 manieren om van de B naar de H te komen, dus in totaal 20x6=120 manieren.

Opdracht 80: HET CODESYSTEEM.
De geheime inlichtingendienst van Randomië bedient zich van allerlei codes bij het zenden van berichten of het opslaan van gegevens. Bij een van de codesystemen gebruikt men woorden van acht letters, waarbij alleen de letters X en Ij worden gebruikt. Een voorbeeld van zo'n codewoord is: XYXXXYXX.

a. Hoeveel verschillende codewoorden kun je binnen dit systeem maken?
b. Maak de tabel op de volgende pagina af:

aantal letters X	aantal letters Y	aantal verschillende code-woorden
0	*8*	*1*
1	*7*	*8*
2	*6*	*28*
...	...	...

c. Controleer je antwoord bij vraag met behulp van de getallen in de derde kolom.

Met de voorafgaande opgaven had niemand al te veel moeite gehad, maar met deze opgave lag dat anders. De meeste leerlingen waren er niet goed uitgekomen, vandaar dat dit vraagstuk bij de huiswerkbespreking veel aandacht kreeg, vooral onderdeel b:

Lr: Als we nul letters X gebruiken, hoeveel woorden kunnen we dan maken?
Wilma: Eén.
Lr: Als je één letter X neemt ...?
W : Acht.
Lr: Hoe kom je aan die acht?
W : Die X kan op alle acht plaatsen staan.
Lr: En twee letters X?
Wilma weet het niet.
Lr: Het voorbeeld staat er niet voor niks. Het staat er natuurlijk om je naar één of ander systeem toe te brengen.
W : 28.
Lr: Hoe kom je daaraan?
W : Het staat daar. (Ze wijst in de tabel.)
Lr: Jaaa. Het gaat er juist om hoe je dat kunt beredeneren. Waar kunnen die 2 letters X staan, op welke plaats?
W : Op de eerste en de tweede plaats.

In de loop van het gesprek komt op het bord:

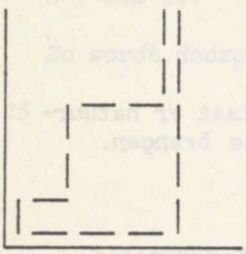
1,2
1,3 2,3
1,4 2,4 3,4
1,5 2,5 3,5 4,5
1,6 2,6 3,6 4,6 5,6
1,7 2,7 3,7 4,7 5,7 6,7
1,8 2,8 3,8 4,8 5,8 6,8 7,8

(Het eerste cijfer van een tweetal stelt de plaats van de ene X, het tweede cijfer de plaats van de tweede X voor.)

Lr: Zie je al één of ander systeem ontstaan?
W : 8+7+6+5+4+3+2+1

Lr: Ja, en dat zal wel 28 zijn neem ik aan. Nou, dat is een manier. Zijn we dit model vaker tegengekomen?
Er is niemand die zich dat kan herinneren. De behandeling van de opgave wordt voortgezet met:
Lr: Goed, zo kun je er dus komen Wilma. En zo kun je ook met die 3 en 4 gaan doen.
Theet: Een lange methode.
Lr: Dus Theet, waar zal ons zoeken nu op gericht moeten zijn?
Theet reageert niet.
Lr: Wie kan dit praten naar die straten en die lanen?
Niemand reageert.
Lr: Zou het veel uitmaken als die X-en en Y-en vervangt door Noord en Oost?

De leraar tekent een rooster op het bord en in het vervolg van het gesprek worden er een aantal wegen ingetekend die alle in hetzelfde roosterpunt (3,5) eindigen:



```
N O N N O O N N
O O O N N N N N
N N N N N O O O
N O O O N N N N
N N O N N N O N
```

Fig. 2

Lr: Dus wat is kenmerkend, voor wegen die hier in dit punt eindigen?
Lr: Elke weg met 3x0 en 5xN eindigt hier.
Lr: Hoeveel wegen eindigen er in dat punt? Hoeveel korte wegen zijn er van dit punt naar dat punt?

De leraar schrijft de getallen uit de driehoek van Pascal in het rooster. Bij het roosterpunt (3,5) komt 56 te staan.
Lr: Wie had dat zelf gezien, die samenhang tussen opgave 80 en die roosters?
Niemand steekt zijn of haar vinger op.
De rest van de opgave moeten de leerlingen zelf nog eens proberen.
(Dit protocol is verzameld, uitgewerkt en van begeleidend commentaar voorzien door Heleen Verhage van de vakgroep OW&OC in Utrecht.)

Het is duidelijk de bedoeling dat bij deze problemen de leerlingen niet alleen een goed antwoord weten te produceren op ieder probleem afzonderlijk, maar dat ze ook tel-procedures weten te ontwikkelen die van toepassing zijn op een grotere klasse van problemen.
In eerste instantie vraagt de leraar bij opgave 78b alleen maar om het antwoord (18 en 20); uit de vragen blijkt echter ook dat hij een keuze voor een strategie heeft gemaakt: eerst alle mogelijkheden van J naar B tellen, daarna die van B naar H afzonderlijk. De vragen bevatten dus impliciete informatie over de procedure. Maarten had een andere strategie gekozen: je telt eerst alles van J naar B en dan tel je gewoon door. Geen wonder dat hij met zijn procedure-opmerking van regel 21 komt. Er zal eerst overeenstemming over de gekozen procedure moeten zijn, wil verdere communicatie zinvol zijn. De leraar gaat onmiddellijk verder met de strategie van Maarten op uitvoeringsniveau, zodat het gesprek gewoon door kan gaan.
Een kwestie van vakmanschap?

Ook bij de behandeling van opdracht 80b, speelt de dialoog zich in eerste instantie op het handelingsniveau af (56 t/m 60). Pas in 61, nà het goede antwoord, komt de vraag naar de procedure. Ook in regel 65 komt de procedure-vraag na de vraag naar de oplossing. In dit geval weet Wilma de oplossing niet en geeft de leraar een aanwijzing: als je er niet meteen uitkomt, moet je proberen een systeem te ontdekken. In het geval van Wilma is dat systeem heel eenvoudig: het antwoord staat in de tabel "Jaaa" zegt de leraar (en bedoelt dus nee) "je moet het juist kunnen beredeneren". Hij stelt hier een duidelijke eis dat het niet gaat om op-zoek-procedures maar om redeneer-procedures. Hij geeft vervolgens zelf weer aan welke redenering je kunt gebruiken (71). Hij geeft dus eerst aan wat voor soort procedures je moet kiezen (redeneren) en vervolgens kiest hij binnen die soort een heel specifieke (kijk naar de plaats van de twee letters X). In 83 weer een bewustmakings-ogenblik voor de procedure, het antwoord interesseert hem niet eens (80), hij probeert heel bewust het spoor van de analogie aan te geven om de gevonden oplossingmethode een procedurele geldigheid te geven. Of probeert hij al vooruit te kijken naar het vervolg waarin je de zaak toch nog heel anders zult moeten aanpakken.
In (94) komt die andere procedure inderdaad om de hoek, waarbij hij dankbaar gebruik maakt van de opmerking van Theet (91). Ook hier geeft hij aan dat we met een analogie te maken hebben (96: je vervangt X en Y "gewoon" door Noord en Oost). Voor de leerlingen is die stap te groot.

Uit de dialoog valt af te leiden dat de leraar er de voorkeur aan geeft om vanaf het handelingsniveau naar het procedure-niveau over te gaan. Zo van "los eerst de som maar op, dan praten we daarna wel over de methode". Die overgang van uitvoering naar procedure komt in drie verschillende situaties voor:

- òf de uitvoering is geslaagd en de leraar vraagt achteraf naar een verwoording van de gevolgde procedure;
- òf de uitvoering is niet gelukt en de leraar dringt aan om nu eerst naar eens een geschikte procedure te zoeken;
- òf de uitvoering lukt wel maar er ontstaan bezwaren tegen de methode, waarop de leraar aandringt op het zoeken van een andere methode.

Ook voor het zoeken naar een geschikte procedure probeert de leraar bij de leerlingen een strategie te ontwikkelen. Het betreft nu de uitvoering van en ander probleem: zoek een geschikte oplossingsmethode. Dit blijkt uit de trapsgewijze overgang naar het stratenmodel. Eerst vraagt hij: "waar moet je zoeken op gericht zijn?" (92), dan komen de straten en lanen op de proppen (94) en suggereert tenslotte dat je X en Y misschien zou kunnen vervangen door Noord en Oost. De leraar geeft niet de procedure rechtstreeks aan, maar geeft het paadje van de analogie aan als middel om een geschikte procedure te vinden.

In het bovenstaande zijn we een aantal procedures tegengekomen waarmee de leerlingen de gestelde problemen proberen op te lossen:

- tel-procedures: gewoon door alle mogelijkheden uit te tellen vind je de oplossing van het probleem;
- redeneer-procedures: je vindt de oplossing door een geschikte redenering op te zetten;
- op-zoek-procedures: het antwoord staat in een tabel (of achter in het boek).

Daarnaast geeft de leraar aan hoe jezelf dergelijke procedures kunt vinden: kijk eens terug naar soortgelijke sommen die je al eerder hebt gemaakt en ga eens na hoe je dat deed.
De dialoog wordt eigenlijk volledig bepaald door deze twee doelen:

- het expliciet oefenen van bepaalde oplossingsmethodes;
- het vinden van dergelijke methodes. De leraar weet deze beide doelen op een natuurlijke wijze in zijn gesprek met de klas in elkaar te verweven. Belangrijk is hierbij de houding dat hij vindt dat de leerlingen moeten leren de problemen zèlf op te lossen. Ook het inspelen op de antwoorden door daar mee verder te gaan en zelfs zijn eigen procedure daarbij aan te passen zal daar debet aan zijn.

5. Tot slot: over de methode

Ik heb in een drietal situaties willen aangeven hoe bepaalde aspecten van het vak wiskunde in dialogen in de klas kunnen doorwerken.
De gekozen situaties hebben geen bewijskracht. Het zijn illustraties bij de bewering dat een aantal vakinhoudelijke aspecten mede

bepalend is voor het vraag- en antwoord-spel tussen leraar en leerling en dat je bij de bestudering van dergelijke dialogen ook aandacht moet schenken aan de vakinhoud. Hoe meer van dergelijke illustraties des te sterker wordt de bewering.

Je kunt dergelijke zaken alleen maar aan het licht brengen door protocollen te analyseren en te interpreteren. Daar zitten een aantal gevaarlijke kanten aan:
- veel niet-verbale informatie is verdwenen;
- de omgevingsfactoren (klasse-situatie, uur van de dag ...) zijn vaak onbekend;
- subjectiviteit speelt een rol (een ander kan de situatie heel anders interpreteren).

Aan de eerste twee bezwaren valt niet te ontkomen.
Ook de subjectiviteit bij het interpreteren is een onvermijdelijke factor, tenzij je protocollen gaat scoren in je objectieve categorieën. Maar daarmee wordt de waarde van de informatie sterk gereduceerd doordat het alleen maar uiterlijke informatie verschaft en geen inzicht geeft over de processen en mechanismen die de feiten hebben veroorzaakt.
Aan het bezwaar van de subjectiviteit is enigszins tegemoet te komen als je duidelijk aangeeft waar je naar hebt gekeken en hoe je dat hebt gedaan. De lezer kan de gevolgde methode toetsen en zich er tegen weren.
In mijn geval heb ik van tevoren een drietal aspecten van het wiskunde-onderwijs genomen waarvan ik verwachtte dat ze een rol zouden spelen bij de taal in de klas: verifiëren, niveaus van denken, oplossingsprocedures. Daar heb ik een drietal voorbeeld-situaties bij gezocht en die geanalyseerd op de taalkundige gevolgen. Dat resulteerde in een aantal opvallende taalconstructies. Beknopt weergegeven zijn dat:
- "stel je voor"-zinnen,
- waarom-vragen,
- "hoe doe je dat"-vragen.

Natuurlijk treden dergelijke constructies ook op in andere situaties. Het ging mij echter om situaties te laten zien waarin (naar mijn idee) de inhoud van het vak onlosmakelijk verbonden is met het taalgebruik.
Bij het analyseren heb ik me niet gehouden aan één specifieke methode, maar heb ik me volledig laten leiden door de keuze van mijn onderwerpen. Zo heb ik bij het tweede fragment aléén de waarom-vragen eruit gehaald en heb daarvan de functie binnen het geheel proberen aan te geven. Vaak ligt die functie niet eenduidig vast. Meestal heb ik dat dan open gelaten en verschillende mogelijkheden aangegeven of alleen maar vraagtekens geplaatst. Het is mogelijk dat ik soms wèl een keuze heb gemaakt terwijl er achteraf meer mogelijkheden blijken te zijn. Het is het recht van de lezer om dat uit te zoeken.

Leek, december 1982 - maart 1983

Bibliografie

Appel, R., G. Hubers en G. Meijer, *Siolinguïstiek*, Utrecht, Spectrum 1976

Bellack, A.A., H.M. Kliebard, R.T. Hyman, F.L. Smith, *The Language of the Classroom*. Teachers College Press, Columbia, University, New York 1966.

Freudenthal, H., *Mathematics* as an *Educational Task*, Reidel, Dordrecht 1973.

Miller, G.A., P.N. Johnson-Laird, *Language and Perception*. Cambridge 1976.

Reiss, V., *Die Steuerung des Unterrichtsablaufs*. Europaïsche Hochschulschriften, 11, Lang, Frankfurt am Main 1982.

Riet, N. van 't, G. Schoenmaker, *Dagboek van twee loerders* (7). Wiskrant 23 (november 1980), IOWO, Utrecht.

Sinclair, J.McH., R.M. Coulthard, *Towards and Analysis of Discourse*, The English used by teachers and pupils. Oxford University Press, Oxford 1975.

Stubbs, M., *Language, Schools and Classrooms*. Methuen, London 1975.