Sieb Kemme

Taalaspecten van het wiskunde-onderwijs: taal en begrippen

Bijna dagelijks fiets ik tussen huis en werk op en neer. Van Leek naar Groningen en weer terug. De tocht voert dus 's morgens in oostelijke en 's avonds in westelijke richting, zodat ik altijd naar de zon toe fiets. Als het weer een beetje meezit maak ik in het voorjaar en de herfst nog net zonsopgang en zonsondergang mee. Zo heb ik in een mooie heldere herfstweek kunnen ervaren hoe de maan beweegt ten opzichte van zon en aarde. In die week zag ik de zon dagelijks ondergaan in de buurt van de toren van Midwolde. Tegelijkertijd stond de maan ongeveer in het zuiden. Ze was nog een beetje bleek, "wolkig", omdat het nog volop licht was. Ik zag dat het halve maan was. Plotseling realiseerde ik me dat dat ook wel zo moest zijn. De toren van Midwolde stond voor mij in het westen, de maan in het zuiden, de hoek tussen zon en maan was dus 90 graden.

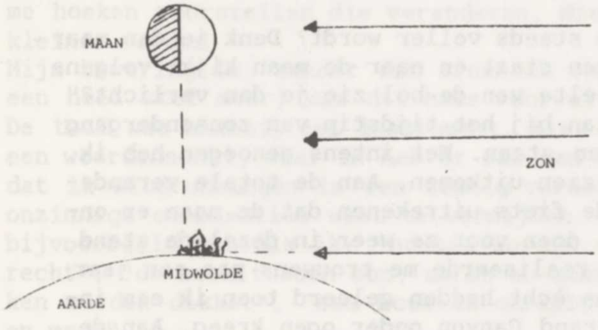

Fig. 1: Zonsondergang boven Midwolde

Dan kùn je van de maan ook alleen maar de rechter helft verlicht zien. De rechter helft verlicht? Dat is de helft van de letter P van "premier", de maan moet dus nog voller worden.

Spiegel 1 (1983), nr. 1, 77-86

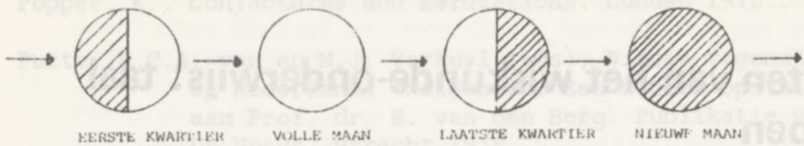

Fig. 2: De schijngestalten van de maan

En dat kun je alleen maar zó voor elkaar krijgen:

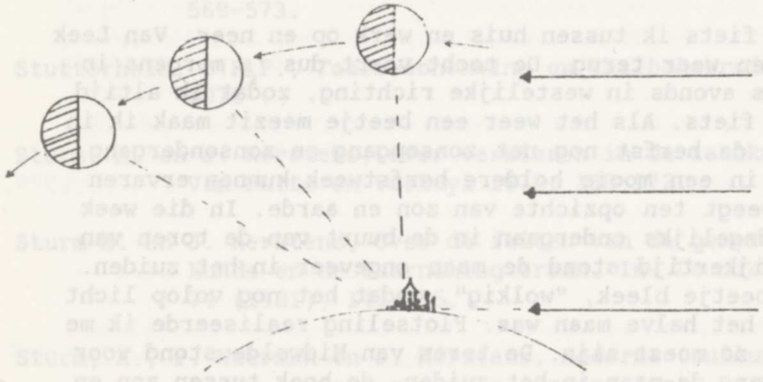

Fig. 3: De maan draait linksom

"Geloof je niet dat de maan steeds voller wordt? Denk je dan maar eens in dat je naast de toren staat en naar de maan kijkt volgens de stippellijnen, welk gedeelte van de bol zie je dan verlicht?" Dat zou betekenen dat de maan bij het tijdstip van zonsondergang steeds oostelijker moet gaan staan. Met intens genoegen heb ik die week mijn voorspelling zien uitkomen. Aan de totale verandering in de hoek kon ik op de fiets uitrekenen dat de maan er ongeveer een maand over moet doen voor ze weer in dezelfde stand staat met aarde en zon. Ik realiseerde me trouwens pas een jaar later wat deze ervaringen me ècht hadden geleerd toen ik een indrukwekkende foto van de Grand Canyon onder ogen kreeg. Aan de kleuren en de schaduwen kon je zien dat de foto midden op de dag was gemaakt. Boven de indrukwekkende rotspartijen prijkte een volle maan. Mijn eerste reactie was: "Dat kan niet, een volle maan overdag". Vroeger zou zoiets me gewoon niet zijn opgevallen. Het was een trucage. De maker heeft zich waarschijnlijk gewoon niet gerealiseerd dat dat onmogelijk was, of gedacht: "Dat zien ze toch niet".

Wereldbeeld is: hoe je tegen dingen aankijkt, hoe je ze interpreteert en waardeert, met welke objecten je je bezighoudt en hoe je daar mee omgaat. Wereldbeelden sturen je handelen en denken. Zoals het verschijnsel dat je je met sommige objecten wèl bezighoudt en andere volledig negeert. Of het verschijnsel dat je liever niet argumenteert, maar de zaak met je handen wilt onderzoeken. Omgekeerd verandert je wereldbeeld voortdurend onder invloed van je ervaringen, als resultaat van je handelen en denken. Hierboven gaf ik een voorbeeld van een dergelijke verandering bij mezelf. Wat me hierin interesseert is de rol van de taal. Dit onderwerp is natuurlijk niet nieuw. De relatie tussen taal en wereldbeeld is aangegeven in de Sapir-Whorf-hypothese die stelt dat "de cultuur van een taalgemeenschap de taal bepaalt of beïnvloedt, en dat de taal het wereldbeeld van het individu bepaalt of beïnvloedt" (Appel e.a. 1976). De bestudering van de hypothese vindt echter alleen maar plaats vanuit linguïstisch of cultureel-antropologisch gezichtspunt. Ik zal in een aantal voorbeeld-situaties aangeven hoe de theorie óók van belang kan zijn bij het onderwijs, in dit geval wiskunde-onderwijs.

Eerst nog even terug naar mijn voorbeeld van de maanbeweging. Aan mijn aanpak kun je wel zien dat ik ooit iets aan wiskunde "gedaan" heb. Dit kun je onder andere terugvinden in de gemakkelijke manier waarin ik praat over: hoeken, hoeken van 90 graden. Ook het gemak waarmee ik tekeningen maak waarin maan en aarde als cirkels en de zon als een richting ("omdat die zo ver weg staat") worden weergegeven, duiden op een schematische manier van denken over hoe de wereld in elkaar zit. Daarnaast beschik ik over een soort dynamisch hoekbegrip, dat wil zeggen, ik kan me hoeken voorstellen die veranderen, die voortdurend groter of kleiner worden.
Mijn bewering is: zonder dit arsenaal van hulpmiddelen (en nog een heel stel meer) was dit hele voorval aan me voorbijgegaan. De taal was hierbij een instrument. Niet alleen beschik ik over een woordenschat, maar ik heb er ook een stel taalregels bij zodat ik uitdrukkingen in een zinnig verband weet te plaatsen en onzinnige combinaties weet te vermijden. Bij het woord "hoeken" bijvoorbeeld gebruik ik: "hoeken worden groter", "een hoek is recht", "de hoek tussen zon, aarde en maan" en vermijd ik: "hoeken worden dikker", "een hoek is onrecht", "de hoek tussen zon en maan".
Ook het denken in figuren en het maken van geschikte tekeningen reken ik hierbij tot de taal. Hoewel er grote uiterlijke verschillen zijn tussen tekeningen en woordentaal, hebben ze hier dezelfde functie: het symbolisch weergeven van "de stand van zaken". Ook voor het tekenen geldt hetzelfde als voor woordentaal: ik beschik over een aantal basiselementen en regels om die elementen te combineren of combinaties te vermijden. Dat die regels niet louter syntactisch van aard zijn, blijkt wel uit de voor-

beelden die ik heb gegeven.

Stel je voor: je weet nog niet wat rechthoeken en vierkanten zijn. Je leraar heeft een verzameling kartonnen figuren gemaakt en probeert je daarmee die begrippen duidelijk te maken.

Eerst laat hij deze zien:

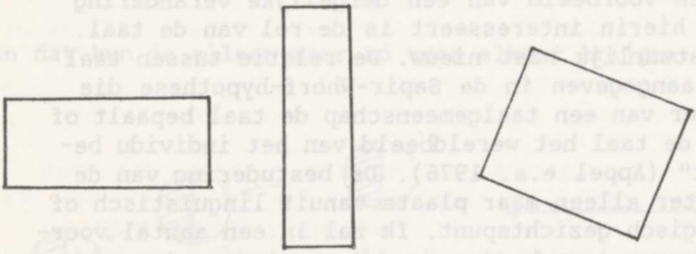

Fig 4: Rechthoeken

en zegt erbij: "Dit zijn rechthoeken."
Dan zie je deze:

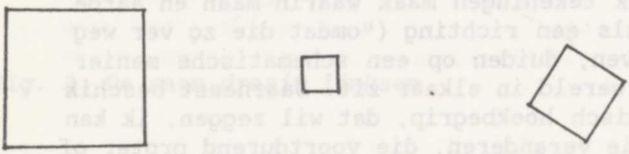

Fig. 5: Vierkanten

En hij zegt: "Dit zijn vierkanten".
Zonodig laat hij nog meer voorbeelden zien. Je hebt nu geleerd wat rechthoeken en vierkanten zijn en je kunt ze onderscheiden op grond van de getoonde *vorm*. Stel je nu eens voor dat in die situatie je leraar zegt: "Een vierkant is een rechthoek". Dan weet je dat dat niet waar is. (De meeste kinderen leren op de kleuterschool het onderscheid tussen vierkanten en rechthoeken min of meer op deze manier. Ze blijven heel vaak volhouden dat een vierkant geen rechthoek is.)

Op grond waarvan vinden wiskundigen dat een vierkant een (speciaal geval van een) rechthoek is? Niet op grond van de vorm alléén (want de vormen verschillen) maar op grond van de *eigenschap*: "een vierkant heeft vier rechte hoeken". Wiskundigen kijken dus niet alleen naar vorm, ze letten ook op woorden en zinnen die de eigenschappen van die vormen naar hun idee kenmerken. Ze gaan daarbij vaak zó ver dat de vorm van de objecten in hun redenaties niet eens meer voorkomt.

Je knipt een figuur uit met de vorm:

Fig. 6: Een vierkant

(Je zorgt er voor dat de zijden zo'n beetje gelijk zijn en de hoeken recht), je laat dat vol trots aan een wiskundige zien: "Kijk eens, ik kan een vierkant maken". Maar tot je grote teleurstelling vindt hij/zij dat helemaal geen vierkant: "Het lijkt er aardig op, maar het is er niet één. Bij een vierkant zijn de zijden precies gelijk en de hoeken precies recht. Vierkanten zijn vierhoeken met vier gelijke zijden en vier rechte hoeken. Je kunt ze dus niet maken of tekenen. Het zijn denkobjecten, fysisch bestaan ze niet". (Troost je: niet alle wiskundigen zijn zo.)
In dit opzicht verschilt jouw wereldbeeld hemelsbreed van dat van je gespreksgenoot. Jullie hebben het over andere objecten (fysisch- of denk-object) en de één gaat er anders mee om dan de ander (aanwijzen, meten, knippen,... of: redeneren over,...). Dit verschil in wereldbeelden is weerspiegeld in de taal: het gebruik van figuren tegenover verbale redenaties, het aanwijzen tegenover het benadrukken van onderlinge verbanden. Hetzelfde woord "vierkant" heeft verschillende betekenissen. Ook de taalregels van dat woord zijn anders. Geconfronteerd met de volgende situatie:

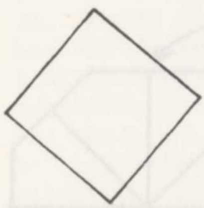

Fig. 7: Ook een vierkant

reageer je misschien met: "Een vierkant op zijn punt" en de wiskundige met: "Waarom zou dat geen vierkant zijn?"

In het wiskunde-onderwijs zit je voortdurend aan de wereldbeelden van leerlingen te sleutelen. Niet altijd met evenveel succes. Vaak ga je ervan uit dat de leerlingen al een bepaalde kijk hebben op de "stand van zaken" en dat ze daar in alle situaties mee uit de voeten kunnen. Dat dat niet altijd het geval is blijkt uit de moeite die het soms kost om eigenschappen van figuren te leren herkennen en benoemen en er vervolgens mee te leren redeneren. Wordt de stap van de "vorm"-taal naar de "eigenschap"-taal te snel gemaakt, dan ontaardt het redeneren in het letterlijk imiteren van de leraar. De structuren van beide talen verschillen nogal. Freudenthal (1978) noemt ze "demonstratieve" respectievelijk "relatieve" taal. De eerste wordt vooral gekenmerkt door de aanwijzende vorm ("Die mevrouw daar...", "In deze figuur deelt diagonaal AC de andere BD middendoor"), de tweede door de verbanden tussen objecten aan te geven. ("De mevrouw met dat rode hoedje...", "In een rechthoek delen de diagonalen elkaar middendoor".) Freudenthal noemt de talen van een verschillend niveau. De eerste taal gaat aan de tweede vooraf en de tweede is een uitbreiding van de eerste.

Stel je voor: de wiskundige van zonet kan heel aardig knutselen. Hij is bezig met een salontafel die op velerlei verzoek achthoekig dient te worden. En dat lukt. Je vraagt: "Hoe deed je dat nou?", dan zal hij gaan beschrijven wat hij heeft gedaan: "Kijk, eerst heb ik het blad netjes vierkant uitgezaagd, daar heb ik toen de diagonalen ingetekend. Met het snijpunt van die diagonalen als middelpunt, kijk dit punt (en hij wijst in een schetsje aan welk punt hij bedoelt), heb ik een cirkel langs de zijden getekend. Dat kun je heel gemakkelijk doen met een spijkertje en een touwtje aan een potlood. Waar die cirkel de diagonalen snijdt, kunt je dan de vier schuine zijden aftekenen van de achthoek. Deze punten bedoel ik. (Zie fig. 8.)

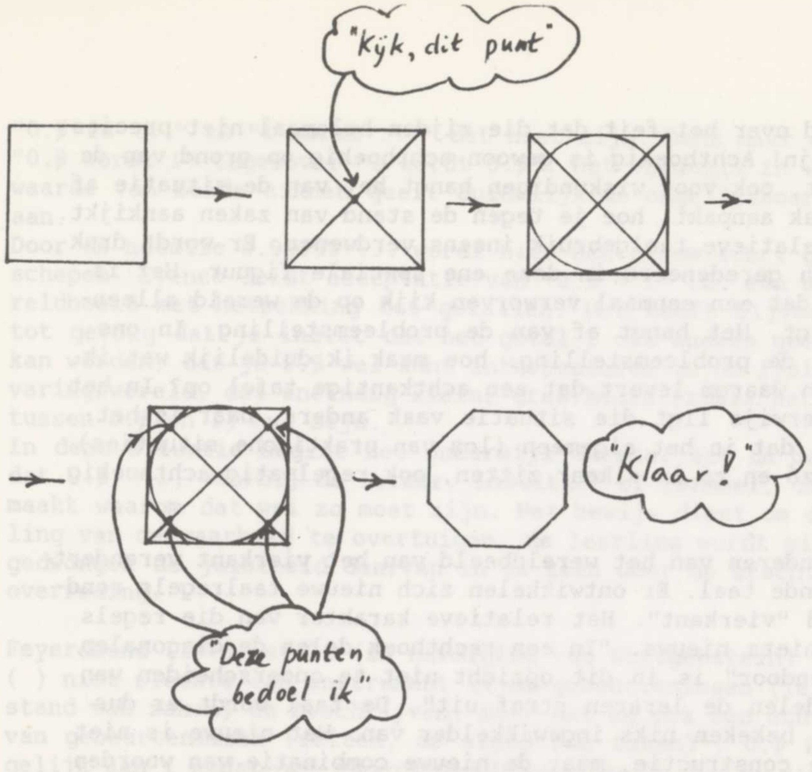

Fig. 8: Hoe je een achthoekige salontafel maakt

Je moet het wel heel precies loodrecht op de diagonalen doen. Met een winkelhaak of zo. Op die manier krijg je een keurige regelmatige achthoek".
"Maar hoe weet je nou dat die stukken dan precies even lang zijn?"
"Ja, dat zie je toch. Meet maar na. Bovendien als je de andere twee loodlijnen op de liggende en staande zijden trekt, dan zie je het aan de symmetrie van de figuur."

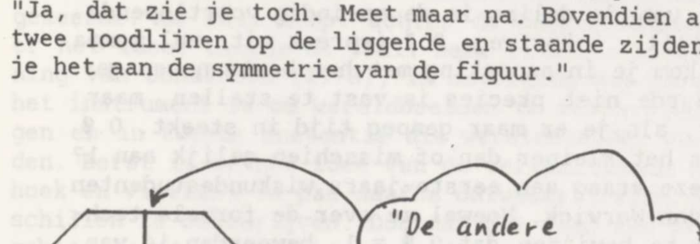

Fig. 9: De symmetrie van de salontafel

Nu geen woord over het feit dat die zijden helemaal niet precies even lang zijn! Achthoekig is gewoon achthoekig op grond van de vorm. Je ziet, ook voor wiskundigen hangt het van de situatie af hoe je de zaak aanpakt, hoe je tegen de stand van zaken aankijkt. Ook is het relatieve taalgebruik ineens verdwenen. Er wordt druk aangewezen en geredeneerd in deze ene speciale figuur. Het is dus niet zo dat een eenmaal verworven kijk op de wereld alleenrechten krijgt. Het hangt af van de probleemstelling. In ons voorbeeld is de probleemstelling: hoe maak ik duidelijk wat ik heb gedaan en waarom levert dat een achtkantige tafel op? In het wiskunde-onderwijs ligt die situatie vaak anders. Daar is het: hoe weet je, dat in het algemeen (los van praktische situaties) figuren die zó en zó in elkaar zitten, ook regelmatig achthoekig zijn?

Met het veranderen van het wereldbeeld van het vierkant verandert de bijbehorende taal. Er ontwikkelen zich nieuwe taalregels rondom het woord "vierkant". Het relatieve karakter van die regels is op zich niets nieuws. "In een rechthoek delen de diagonalen elkaar middendoor" is in dit opzicht niet te onderscheiden van "Op school delen de leraren straf uit". De taal wordt er dus grammaticaal bekeken niks ingewikkelder van. Het nieuwe is niet de relatieve constructie, maar de nieuwe combinatie van woorden die een verandering van betekenis van "rechthoek" impliceert. Je praat nu niet meer over rechthoeken alsof het enkel en alleen speciale vormen zijn, je kunt erin tekenen, ermee redeneren, andere vormen onderscheiden,...

Als je 1/9 probeert uit te rekenen met een staartdeling, zul je ontdekken dat je in een bewerking zonder einde bent verzeild geraakt. De "uitkomst" van de deling is de oneindig voortlopende decimale breuk 0.1111111..., kortweg: $0.\not{1}$ (spreek uit: nul komma één repeterend). Zo kom je in aanraking met het bestaan van getallen waarvan de waarde niet precies is vast te stellen, maar wel steeds preciezer, als je er maar genoeg tijd in steekt. $0.\not{9}$ is ook zo'n getal. Is het kleiner dan of misschien gelijk aan 1? Taal (1981) stelde deze vraag aan eerste-jaars wiskundestudenten van de universiteit van Warwick. Hoewel ze over de formele technieken beschikten om te bewijzen dat $0.\not{9} = 1$, beweerden 14 van de 36 studenten dat $0.\not{9} < 1$ is.
De objecten $0.\not{9}$ en 1 zijn zó ongelijksoortig dat het haast bij voorbaat onmogelijk lijkt dat ze gelijk zouden kunnen zijn. $0.\not{9}$ is het gedachte resultaat van een niet-eindigende notatie. Het is een denkobject dat geen representant heeft in de fysische ervaringswereld. Het getal 1 daarentegen is op zeer veel manieren om ons heen aan te wijzen: "er is er maar één van", "dit lijnstuk is 1 cm lang", ... De anderssoortigheid van de objecten is heel direct terug te vinden in de verschillen in taalregels van beide: $0.\not{9}$ *wordt*..." en "1 *is*..." worden als correct ervaren, terwijl

"0.∅ *is* ..." en "1 *wordt* ..." dat niet zijn. Denk maar eens aan "0.∅ wordt 1" tegenover "1 wordt 0.∅". Het verschil in waarheidswaarde van beide zinnen geeft duidelijk de ongelijksoortigheid aan.
Door de notatie 0.99999 ... wordt hier een nieuw soort getal geschapen. Evenzo leidt acceptatie van "0.∅ = 1" tot een ander wereldbeeld met betrekking tot getallen. Het heeft bijvoorbeeld tot gevolg dat je inziet dat het getal 1 ook anders geschreven kan worden, dat je 0.∅ wel kunt interpreteren in de fysische ervaringswereld, dat oneindig kleine grootheden (zoals het verschil tussen 0.∅ en 1) nul zijn.
In deze situatie begint het onderwijs meestal met de bewering dat 0.∅ = 1, waarbij de leraar, intuïtief of formeel, duidelijk maakt waarom dat wel zo moet zijn. Het bewijs dient om de leerling van de waarheid te overtuigen, de leerling wordt min of meer gedwongen de juistheid daarvan in te zien door de kracht van de overreding.

Feyerabend (1975) stelt (in navolging van Wittgenstein) dat "taal ( ) niet slechts een instrument is om gebeurtenissen (feiten, de stand van zaken) te *beschrijven*, maar dat ze ook een schepper is van gebeurtenissen (feiten, de stand van zaken)". 0.∅ is niet gelijk aan 1 *omdat* het anders geschreven wordt. In de zin "0.∅ = 1" heeft het "="teken niet de betekenis van: "is identiek aan", maar "0.∅ *wordt* 1" of: "0.∅ en 1 hebben dezelfde waarde in de fysische ervaringswereld". In het bovenstaande voorbeeld heb ik dus een situatie in het wiskunde-onderwijs proberen te scheppen waarin de taal een schepper is van wereldbeelden met betrekking tot getallen.
In het voorbeeld van de rechthoeken en vierkanten zie je het omgekeerde: de taal loopt achter de gebeurtenissen aan. Eerst is er het idee, daarna de taal. Deze situatie sluit aan bij de mening van Donaldson (1978), in navolging van Piaget, dat de taal het instrument is om wereldbeelden te beschrijven en vast te leggen en in tweede instantie die wereldbeelden weer zal beïnvloeden. Eerst is er het idee van de verschillende vormen van rechthoek en vierkant en pas daarna ontwikkelt zich de taal om de verschillen te beschrijven. Doordat die taal een breder toepassingsgebied heeft dan alleen maar die twee soorten figuren, zal er een verdere ontwikkeling naar andere situaties kunnen optreden.
Met het eerste voorbeeld, over de beweging van de maan, heb ik duidelijk willen maken dat die beïnvloeding van taal en wereldbeeld ook gelijktijdig kan gebeuren. Er is dan een directe wisselwerking: het beschikbaar hebben van de taal als specifieke beschrijver van de stand van zaken veranderde niet alleen mijn ideeën over die stand van zaken, maar ook het beschrijvingsinstrument. Ik ben dergelijke beschrijvingen anders gaan waarderen doordat ze hun nut hebben bewezen. Bovendien is de betekenis van een aantal uitdrukkingen veranderd doordat ze van toepassing ble-

ken te zijn in nieuwe situaties. ("Er zijn dus ook hoeken om ons heen, een hoek wordt dus niet altijd begrensd door twee rechte lijnen op een blad papier".)

In het wiskunde-onderwijs kun je met die Sapir-Whorf-hypothese dus alle kanten uit. Het zou interessant zijn om uit te zoeken of er sprake is van enige systematiek in de verschillende gevallen en of er een oorzaak voor de verschillen is aan te wijzen. Het zou wat meer zicht kunnen geven op een aantal didactische problemen binnen de wiskunde als gevolg van taal"moeilijkheden". Daarnaast hoop ik met dit verhaal duidelijk te hebben gemaakt dat in de wiskunde de taal een hele specifieke weerspiegelende en regelende taak heeft bij de ontwikkeling van het denken.

September 1982, Sieb Kemme

Literatuur

Appel, R., G. Hubers en G. Meijer, *Sociolinguïstiek*, Utrecht Spectrum 1976.

Donaldson, M., *Children's Minds*, Fontana/Collins 1978.

Feyerabend, P., *Against Method*, London Verso, 1975.

Freudenthal, H., *Weeding and Sowing*, Dordrecht Reidel 1978.

Tall, D., en S. Vinner, Concept image and Concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12 (1981) 151-169, Dordrecht, Reidel.