Hans Freudenthal

(reken)taal beschouwing

MOEDERTAAL EN WISKUNDETAAL

Het geeft te denken dat het aantal regels van de wiskundetaal klein is en het 'zuiver spreken' van die taal zoveel moeite kost.
Hans Freudenthal, medewerker van het IOWO, gaat in op de relatie moedertaal en wiskundetaal. Hun wederzijdse afhankelijkheid kan aanleiding zijn voor een gesprek tussen moedertaal- en wiskundeleerkracht.

1, 2, 3, ... — hoort dit tot de moedertaal of tot de wiskundetaal? Hardop gelezen is het Nederlands, maar voor een Franstalige, een Engelstalige, een Duitstalige, zou het Frans, Engels, Duits klinken. Het kind leert de getallenrij (althans een beginstuk ervan) en meestal ook simpele sommetjes in het kader van zijn moedertaal, dat wil zeggen niet anders dan woorden als 'tafel' en zinnen als 'doe de deur dicht'. Toch vertoont de getallenrij al vroeg de neiging een eigen leven binnen de moedertaal te leiden. Op zeker ogenblik — meestal bij de overstap naar de 'grote school' — wordt de navelstreng doorgesneden tussen moedertaal en wiskundetaal. De wiskundetaal is 'geboren', maar dat betekent niet dat de boreling het zomaar zonder de moeder kan stellen. De afhankelijkheid blijft voortduren — trouwens een wederzijdse afhankelijkheid.
De telrij is in alle talen — voorzover mij bekend — een buitenbeentje. De telwoorden doen zich als bijvoeglijke naamwoorden voor, worden in sommige talen ook als zodanig geflecteerd. In 'rode knikkers' zegt 'rood' iets over elke afzonderlijke knikker — de knikker is rood. In 'vijf knikkers' is de vijf geen eigenschap van de afzonderlijke knikker — 'de knikker is vijf' kan niet — maar van een verzameling knikkers. Jonge kinderen hebben er moeite mee: ze moeten nog leren waar de vijf op slaat. Een bekend verschijnsel: op de vraag 'hoeveel knikkers?' gaan ze tellen, en op de hernieuwde vraag, hoevéél het er dan zijn, tellen ze opnieuw. Pas door 'resultatief' te tellen, tonen ze aan te hebben begrepen waar de 'vijf' een eigenschap van is.
De telrij is een buitenbeentje. Bij ieder getal hoort een volgende en zodra je het systeem door hebt kun je zelf bij elk getal zijn opvolger construeren. Van dingen die je anders tegenkomt, van wat er om je heen gebeurt, moet je telkens weer opnieuw de naam leren — een woord of een hele volzin. In 't begin althans, geleidelijk leer je je wel zelf te redden door verbanden te leggen. Maar die verbanden zijn zwak, de constructiemiddelen onzeker en onregelmatig. De getallen laten zich, van een beginstuk afgezien, met regelmatig te construeren namen oproepen, en de on-

regelmatigheden in de gesproken taal vervallen geheel en al in schrift en druk. De getallen vormen een vocabulaire dat je zelf kunt aanmaken en uitbreiden.
Met de schriftelijke codering zet een proces van 'formaliseren' in — in de rekenles meteen veel indringender en gestroomlijnder dan in de moedertaalles. De 'natuurlijke' talen zijn maar zwakjes geformaliseerd. De taal van de telrij is zowat de eenvoudigste geheel geformaliseerde taal. De regels zijn verbluffend eenvoudig: bij een geschreven getal vind je het volgende door naar het meest rechtse cijfer te kijken en het volgens het recept
$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow 9$
te vervangen of als het een 9 mocht zijn de hele rits negens waarvan het deel uitmaakt door nullen te vervangen en op de eerste niet-negen (eventueel een slapende 0) de vorige regel toepassen.
Zo gaat het verder in de rekentaal: een vocabulaire dat wetmatig geconstrueerd is en bewerkingen die met eenvoudige regels beschreven zijn en die je, als je ze door hebt, kunt uitvoeren zonder er iets van te begrijpen. Algorithmen noem je zoiets ook: algorithmen voor het cijferen, voor percenten, voor breuken, voor negatieve getallen, voor machten, voor logaritmen enzovoort. Wat mag wordt door syntactische regels vastgelegd, zonder beroep op enige betekenis, die voor formele talen trouwens niet eens vereist is.
Ook natuurlijke talen kennen formele regels. 'Hij zijn een meisje' mag niet in 't Nederlands om formele redenen. 'Hij is een meisje' klinkt gek, maar je kunt je situaties voorstellen waar het niet alleen correct Nederlands maar zelfs inhoudelijk zinvol is.
De natuurlijke talen kennen regels, bij elkaar te veel en te vaag om op te noemen — je begrijpt nauwelijks hoe een kind die in luttele jaren onder de knie krijgt. De regels van de wiskundetaal zijn hierbij vergeleken klein van aantal, maar het 'zuiver spreken' van die taal kost de meesten, zoniet allen, meer tijd en moeite dan bij de moedertaal het geval is. Dit geeft te denken.
Formele talen — vocabulaire, syntax, algorithmes — kunnen als je ze beheerst, onberispelijk functioneren, vooral als het een computer is die je met zo'n taal programmeert. Maar mensen, en zeker ook kinderen, zijn geen computers; ze hebben heel andere functies dan alleen die van geprogrammeerd te kunnen worden, en daar komen dan de moeilijkheden vandaan die ze op den duur

met de wiskundetaal kunnen krijgen.

Taal en context

Taal is geen doel in zichzelf. Je spreekt en schrijft omdat je iets te zeggen hebt. Woorden en zinnen betekenen iets en worden dankzij en samen met hun betekenissen in leerprocessen verworven en waar het te pas komt toegepast. Natuurlijk kun je ook taaluitingen zonder betekenis van buiten leren, maar het kost veel meer moeite, het beklijft niet en je hebt er niets aan. Een formele taal kun je los van elke betekenis hanteren als je hem eens een keer goed hebt geleerd en gememoriseerd. Dat lukt uitstekend met zo'n eenvoudige formele taal als de getallenrij. Cijferen is ingewikkelder, bij de breuken lukt het maar zowat de helft van de leerlingen en bij de algebra valt er weer zo'n helft, zoniet meer, af.
Taal is geen doel in zichzelf — zei ik. Om geleerd te worden moet taal zinvol zijn, zinvol als middel

om met anderen en zichzelf te communiceren. Losse taaluitingen, holle kreten, zijn niet zinvol. Tekst vraagt om context. Met 'drie knikkers en nog twee erbij' wordt $3+2=5$ een zinvolle taaluiting, tenminste als je ooit het winnen en verliezen van knikkers als zinvolle bezigheid hebt ervaren. Met 25 kg schouderham en er nog 13 kg bijbestellen ben je op het randje van het zinvolle en in een zwembad van 50 m lang, 20 m breed en 5 m diep kun je letterlijk maar ook overdrachtelijk verdrinken. Maar zelfs daar blijft het niet bij. Hoe hoger de leerling op de schoolladder klimt, des temeer verschaalt de wiskunde tot een taaltje dat nergens voor schijnt te dienen dan nog hoger op te mogen klimmen. Wie de klim lukt, loopt de kans van de wiskunde niet meer dan een taaltje te hebben geleerd dat nergens toe dient dan – als de gelegenheid zich voordoet – aan een nieuwe generatie te worden onderwezen.
Geen opwekkend beeld, maar dan ook overdreven zwart geschilderd. Iedereen weet dat wiskunde een machtig werktuig in onze strijd om het bestaan en begrip van de wereld is en voor velen veel meer dan een onbegrepen brabbeltaaltje zonder betekenis.
Wiskunde is meer dan taal. Of veeleer: de wiskunde bezit een taal, de wiskundetaal waarmee je wiskunde kunt meedelen aan anderen en aan jezelf. Echt wiskunde is de inhoud die je meedeelt; de taaluitingen betekenen iets. De wiskunde bemoeit zich bij voorkeur met inhouden die zich gemakkelijk laten schematiseren: hetgeen – van de winsten en verliezen bij het knikkeren tot het gedrag van een kunstmaan toe – door spelregels van mens of natuur wordt beheerst. Omdat het schematiseerbaar is, is het mathematiseerbaar. Met het weer en de economie, waar zoveel onvoorziene factoren het schematiseren bemoeilijken, hebben we meer moeite en individueel menselijk gedrag is maar in heel vage schema's te vatten.
Gegeven en gevraagde inhouden worden door taalmiddelen medegedeeld, aanvoegend, vragend of gebiedend. Hoe beter voor schematiseren vatbaar des temeer formeel kan de taal zijn waarin dit geschiedt. Dat is dan de kracht van de wiskunde: gemakkelijk schematiseerbare inhouden in wiskunde omzetten, door middel van een wiskundetaal die zo sterk geformaliseerd is, dat je je er op lange trajecten in kunt bewegen zonder er zin aan te verbinden, om tenslotte de uitkomst terug te vertalen naar de inhouden toe waar het om gaat.

Voorbeelden

Een voorbeeld om te laten zien wat de wiskunde zich wel of niet kan permitteren. Neem de volgende uitspraken:
In de bus zaten bejaarde dames en kinderen
In de bus zaten bejaarde dames en heren
beide naar de vorm gelijksoorig, terwijl het inhoudelijk duidelijk is dat de eerste keer het bijvoeglijk naamwoord 'bejaard' alleen op het eerste zelfstandig naamwoord slaat terwijl het de tweede keer allebei betreft.
Nederlandse taal en wiskunde
Nederlandse taal en letterkunde
vormen een dergelijk geval. Hardop gelezen zul je vermoedelijk een verschil in pauzes en intonaties opmerken, maar gedrukt lijken ze formeel hetzelfde en alleen via de inhoud kun je er een extra structuur in aanbrengen.
Zolang je in de sfeer blijft van de mondelinge communicatie kun je ook in de wiskunde met middelen van pauzes en intonaties volstaan om je bedoeling over te brengen:
vijf plus drie ... maal zeven
is iets anders dan
vijf ... plus drie maal zeven
– ik heb eigenaardigheden van uitspraak hier door stippeltjes trachten weer te geven, maar echt schriftelijk zou ik het in de vorm
$(5+3) \times 7$
respectievelijk $5 + (3 \times 7)$
moeten doen (waarbij ik volgens 'Meneer van Dalen wacht op antwoord' het tweede paar haakjes ook mag weglaten).
Onder de verschillen tussen wiskundetaal en 'natuurlijke' talen vallen vooral de strikte interpunctieregels op. Ook de natuurlijke talen kennen interpuncties en interpunctieregels, maar die zijn dan veelal arbitrair en conventioneel en vooral in het Nederlands trek je je er niet erg veel van aan. In elk geval schieten ze wat structurerend vermogen betreft schromelijk tekort. In de voorbeelden die ik gaf werd de formele structuur door de inhoud gegarandeerd. Je leest en interpreteert taaluitingen zo, dat ze zinvol lijken. Maar
$(5+3) \times 7$
en $5 + (3 \times 7)$
zijn los van elke context beide even zinvol en je kunt de haakjes echt niet missen als je je bedoeling ondubbelzinnig wilt laten overkomen, terwijl er geen behoefte is aan haakjes in
(bejaarde dames) en kinderen

bejaarde (dames en heren)
of in
(Nederlandse taal) en wiskunde
Nederlandse (taal en letteren).
En mocht de behoefte zich echt eens voordoen, dan zou je geheel andere taalmiddelen kiezen om te doen uitkomen wat je bedoelt. In 't Engels is er een befaamd voorbeeld
pretty little girls schools
waar je naar gelang van de — onbrekende — haakjes 17 verschillende betekenissen aan kunt hechten, maar in de praktijk van de levende taal zal de *bedoelde* betekenis óf uit de context moeten blijken óf zou je je bedoeling in heel andere bewoordingen moeten formuleren.

Vertalen naar de wiskundetaal toe

Ik heb voor het karakterverschil tussen moedertaal en wiskundetaal dit voorbeeld gekozen omdat hier aan beide kanten een taak ligt zodra men in het onderwijs meer nastreeft dan het communiceren in een taal, te weten het doel de taal waarin men communiceert tot onderwerp van analyse te maken. Deze bezigheid leidt tot wat men in de wiskunde 'formaliseren' noemt: het herzien en nieuw scheppen van taalmiddelen, die zich zo automatisch mogelijk laten hanteren — het meest automatisch in de zogenaamde puur formele talen. Voor de vooruitgang van de wiskunde is dit formaliseren een onmisbare voorwaarde, voor het wiskunde-onderwijs betekent het klakkeloos en prematuur overnemen van de uitkomsten van dat formaliseren een gevaar, dat trouwens al lang onderkend is: de leerling wordt gedwongen iets na te apen dat hij niet begrijpt.
Wiskunde dient ergens voor. Echte wiskundeproblemen zijn zelden of nooit zo geformuleerd als men ze in boeken en examentoetsen vindt. Ze ontstaan in situaties die allereerst in de moedertaal worden verwoord, in een moedertaaltekst waaraan geschaafd moet worden, waar je de essentialia uit moet halen, die je moet vertalen in wiskundige termen die je wiskundig bewerkt tot een uitkomst toe die je terug vertaalt naar de situatie waar je mee gestart bent.
Volgens een oude traditie wordt het toegepaste rekenen geoefend met zogenaamde redactiesommen, die eertijds uitmondden in lopende waterkranen die een bad vullen, fietsers die elkaar tegemoet rijden of inhalen, werklieden die al dan niet samenwerken. Voor elk van die typen is er een oplossingsmethode, een algorithme waarin het probleem vertaald wordt — een averechtse toegepaste wiskunde waarvan ook zij bij wie ze aanslaat geen baat hebben. Men streeft tegenwoordig naar het onderwijzen van wiskunde in brede, rijke contexten. Jammergenoeg zijn er nogal wat onderwijsgevenden die zich verplicht voelen deze taken voor hún leerlingen te vergemakkelijken door de contexten te ontleden in smalle stroken en te verschralen. Voor míjn leerlingen is dat brede en rijke te moeilijk — redeneren ze en ontnemen hun iets waar ze recht op hebben: het beschrijven en begrijpen van situaties in termen van een geschakeerde moedertaal en het vertalen naar de wiskundetaal toe.
Laat ik dit met een enkel voorbeeld toelichten:
Een volwassene vertelt dat in de supermarkt in de middag gemiddeld meer publiek is dan in de ochtend. Een elfjarige vraagt wat 'gemiddeld' betekent. De volwassene: 'Neem eens bijvoorbeeld 24, 13, 35. Kun je die optellen?'... 'Goed, en nu door 3 delen'.
Wel, het gaat precies zo als de volwassene zelf het op school heeft geleerd, buiten elke context gemiddelden uitrekenen, en precies zo als in toetsen over gemiddelden wordt gesproken. Maar 'gemiddeld' heeft in de omgangstaal een geheel andere functie dan in een kaal sommetje — een vagere functie uiteraard, maar dan een die je eerst in die context waar je omgangstaal spreekt, begrepen moet hebben alvorens het begrip te mathematiseren. Je kunt een lange en gevarieerde lijst van voorbeelden van 'gemiddeld' in de omgangstaal opmaken en als je die met de leerlingen analyseert, zal blijken dat er ook qua mathematisering meer achter zit dan de simplistische regel van n getallen op te tellen en de som door n te delen. De gemiddelde jaarlijkse alcohol-consumptie in Nederland bepaal je niet door die van alle individuen afzonderlijk bij elkaar op te tellen en door het aantal individuen te delen, maar je begint direct bij het totale alcoholverbruik, want dat is het enige waar je vat op hebt. Trouwens, waarvóór bepaal je gemiddelden, waaróm praat je over gemiddelden, over de gemiddelde mens, de modale werknemer? Ook dit zijn vragen die allereerst in een brede en rijke context moeten worden gesteld en beantwoord.

Variabelen

Typeert hetgeen ik tot nu toe te berde bracht de wiskundetaal voldoende in haar verhouding tot de moedertaal? Ik gebruikte af en toe het woord rekentaal, een taal die althans haar vocabulaire met de moedertaal gemeen heeft. Maar één keer kwamen in mijn tekst losse 'letters' voor

n getallen op te tellen en de som ervan door n te delen

als definitie van het gemiddelde, terwijl letters en letterformules toch een opvallend kenmerk van de wiskundetaal heten te zijn. Ik had de n daarstraks kunnen omzeilen:

een aantal getallen optellen en door dit aantal delen

waarbij dan 'een aantal' de plaats opeist van de *eerste* n en 'dit aantal' naar dezelfde n terugverwijst — minder beknopt en minder exact dan in de wiskundetaal. Eigenlijk was de formulering van daarstraks ook maar ten dele wiskunde-stijl: 'n getallen en de som ervan' vertoont weer dezelfde vaagheid en het vage terugverwijzen dat we zonet bij 'aantal' in plaats van n opmerkten.

Echt wiskundig zou het moeten wezen:

Definitie: Gemiddelde van $a_1, \ldots, a_n$

$= \frac{1}{n}(a_1 + \ldots a_n)$

of nog degelijker

$= \frac{1}{n} \Sigma_i{}^n{}_{i=1} a_i$

waar het Σ-teken het sommeren van de a_i (van 1 tot n) signaleert.

Letters in de wiskunde zijn een erfenis van de Griekse oudheid. Men kan zich een tijd voorstellen toen meetkunde beoefend en medegedeeld werd met figuren in het zand en op de manier van 'en dan verbind ik dit punt met dat punt en neem er het midden van en laat vanuit dat midden een loodlijn neer op deze lijn daar'. Zoiets heb ik demonstratieve taal genoemd — demonstratief door de ditten en datten, waarvan daarstraks 'dit aantal' ook een voorbeeld was.

Voor *mondelinge* communicatie was dit een allicht bruikbare methode, die moest falen zodra mededelingen moesten worden gefixeerd. Men kwam toen op het idee de punten waarvan in de figuren sprake was te nummeren en wel met de letters van het alfabet, die trouwens bij de Grieken ook dienst deden als cijfers. Men zette die letters naast de punten, waarvan ze als het ware de namen waren, zoals op een landkaart naast zekere zwarte vlek drukinkt het woord 'Amsterdam' kan zijn geplaatst. Maar de methode leverde meer op dan het plaatsen van namen op landkaarten. 'Amsterdam' op zo'n landkaart is uniek, maar al hetgeen ten aanzien van de getekende driehoek ABC wordt gesteld of bewezen, wordt geacht voor elke driehoek ABC te gelden. A, B, C zijn niet namen van dit punt en dat punt en nog een punt — ze zijn wat de wiskundige variabelen noemt, veelzinnige namen, waarmee je naar gelang het uitkomt soms dit object en soms dat kunt oproepen.

Ook de moedertaal kent deze veelzinnige namen. Je kunt niet voor elke tafel, elke kei, elke muis, elk tijdstip, elke plaats een nieuwe naam verzinnen. Men spreekt van dé tafel als er in de gegeven situatie maar één in aanmerking komt; zijn het er meer dan is het 'deze tafel' en 'die tafel' of de 'groene tafel' of 'de tafel, waar de vaas op staat'. En navenant is het met de andere voorbeelden gesteld: 'de Amersfoortse kei', 'de muis in de val', het 'nú' dat telkens weer een andere betekenis heeft naar gelang van het ogenblik waarop ik het uitspreek, het 'hier' en 'daar', die naar gelang van de plaats van de spreker van betekenis veranderen.

De chaos van variabelen in de moedertaal heeft tot tegenhanger in de wiskundetaal een gestroomlijnd systeem. Tafel, steen, muis, nu, hier, daar — veelzinnige namen die alleen maar voor tafels, stenen, muizen, tijdstippen, plaatsen dienst kunnen doen. En daartegenover: A, B, C ..., a, b, c, ..., α, β, γ, ... enzovoort, die voor alles en nog moeten komen opdraven. 'Conventionele variabelen' noem ik het, namen waar je elke gewenste betekenis aan mag hechten — maar dan uiteraard één en dezelfde zo vaak als ze in een zekere besloten tekst voorkomen.

Een voorbeeld:

Wij leerden op school: De vierkantswortel uit een getal is dat getal dat gekwadrateerd het oorspronkelijke getal oplevert.*

** We hebben het alleen over niet-negatieve getallen.*

Een door al die verwijzingen: 'een getal', 'dat getal', 'oorspronkelijk getal' moeilijk leesbaar en nog moeilijker te begrijpen zin.

Hetzelfde met conventionele variabelen:

x heet vierkantswortel uit a als $x^2 = a$.

Nog korter, met logische symbolen:

$x = \sqrt{a} \leftrightarrow x^2 = a$

En nog beknopter in 'functionele taal', waarbij het kwadrateren als een functie wordt opgevat:

Vierkantsworteltrekken is het inverse van kwadrateren.

Het zijn niet meer dan trivialiteiten wat ik hier omtrent de verhouding van wiskundetaal en moedertaal heb uiteengezet. Gesneden koek voor wie het dagelijkse kost is. Onderwijs gaat er vaak aan mank dat de leermeester — voor de klas of als leerboekschrijver — zich niet voldoende realiseert dat wat voor hem gesneden koek is, voor de leerling een onverteerbaar brok kan zijn.

Verbinding

Maar behalve de kloof tussen leermeester en leerling die elkaar niet verstaan omdat ze verschillende talen spreken, is er die tussen leer*meesters* die als vogels van diverse pluimage qua toonzetting verschillen. Als het op taal aankomt — een belangrijk maar niet het enige aspect van school en leven — zou je de vakkencombinatie 'wiskunde — moedertaal' voor de toekomstige leraar ideaal willen noemen. Ideaal, ware het niet dat de leermeesters van de toekomstige leraren ook weer vogels van diverse pluimage zijn, die hun best zouden moeten doen om elkaar te begeleiden (en het ergens misschien ook doen).
Ik heb de verschillen tussen moedertaal en wiskunde hier — niet breed, want het kan veel breder — op een ongewone wijze uitgemeten. Niet qua vocabulaire — niet dat er in de wiskunde geen grotere en kleinere helft bestaat, niet van wat het verschil is tussen een ruit in de wiskunde en een vensterruit, tussen een vierhoek en een vierkant, tussen de hoek die je meet en die waarin je moet gaan staan. De moedertaalkundige aandacht van de wiskundeleraar blijft veelal bij kwesties van vocabulaire bepaald en de wiskundetalige van de moedertaalleraar tot dat er telwoorden zijn, onbepaalde en bepaalde, hoofd- en rangtelwoorden, terwijl er diep onder deze koppels heel wat relevante wiskunde kan worden gedolven.

Ik heb veeleer de syntactische kant uit gekeken. De 'en' in de titel 'Moedertaal en wiskundetaal' is zo'n syntactisch element en juist in titels kan zo'n voegwoord van alles wezen: nevenschikkend, tegenstellend, ironisch en — ga zo maar door. Ook synthetisch, en dat zou je het liefste willen, synthetisch in de zin van opheffing van antithesen. Maar dan moet allereerst de antithese worden uitgewerkt en dat heb ik hier — althans bij wijze van aanduiding — trachten te doen.
In het onderwijs is synthese een zaak van individuele activiteit. De leerling — zeker in het voortgezet onderwijs — wordt geacht, wat in verschillende lesuren uit verschillende bronnen op hem afkomt, niet in verschillende hokjes op te bergen, maar zo nauw als het kan onderling te relateren. Het wordt hem niet gemakkelijk gemaakt maar het zou hem vergemakkelijkt kunnen worden als althans aanzetten tot die synthese 'hogerop' zouden beginnen. Ik bedoel op het niveau van de leermeesters — die voor de klas of die achter het bureau waar leerplannen en leerboeken ontstaan. Ontwikkeling van onderwijs — in de klas of achter het bureau — veronderstelt een attitude van bewustmaking en gedachte-experiment: bewustmaking van die kloven tussen leerlingen onderling en leerlingen en leermeesters en leermeesters onderling en het gedachte-experiment van hun overbrugging — een activiteit waarvoor geen blauwdrukken zijn.

Een van mijn — inmiddels overleden — oud-collega's slaakte na dertig jaren onderwijservaring de kreet: 'Elk jaar moet ik het ze opnieuw vertellen. Ze leren het nooit.' Wat dit 'het' was doet hier niet terzake, maar een mathematisch-linguïstische analyse van de variabele 'ze' zou het wel doen.