Ed de Moor

extra hindernissen bij de overstap

21

WISKUNDE-ONDERWIJS 10 TOT 14

Bij de overgang van BO naar VO wordt er naast de waardering voor taalvaardigheden vooral gelet op de rekencijfers van de leerling. Voor meer inzicht in bewerkingen en het toepassen van rekenvaardigheden pleit de schrijver voor een didactiek die parallel loopt met de VON-visie voor moedertaal. De aansluitingsproblemen tussen procenten en breuken van de basisschool en de wiskunde in de brugklas kunnen opgelost worden door een andere leerstofordening en meer aandacht voor reflectie op eigen en andermans rekenen.
De schrijver Ed de Moor is vanuit de Stichting Opleiding Leraren (SOL) betrokken bij het BOVO-project Amersfoort.

Inleiding

Bij de aansluitingsproblematiek basisonderwijs — voortgezet onderwijs (BOVO) stuit men vanzelf op de kwestie van de eindtermen voor het BO en de daarbij behorende toetsingsproblematiek. In het kader van de BOVO-cursus te Amersfoort werden daartoe de zogenoemde voortgangstoetsen voor rekenen (dit zijn toetsen die gedurende het vijfde en zesde leerjaar worden afgenomen) bestudeerd. Ik deed iets, wat niet mag. Ik maakte één van de enveloppen open, waarin het werk van de kinderen van 1980 zat. Daarna analyseerde ik de opgaven, maar vooral de gemaakte fouten van die ene leerling, die ik voor het gemak Peter noem.
Nadat Peter een blad vol breukensommen, zoals

$$16\frac{1}{4}+1\frac{2}{3}\times 6\frac{3}{4}-7\frac{1}{2}:3$$

redelijk goed had uitgewerkt, mocht hij nog een aantal redactiesommen trachten op te lossen.
Het eerste vraagstuk luidde:
Een auto rijdt met een snelheid van 72 km per uur. Hoe lang rijdt deze auto over een afstand van 18 km?

Peters antwoord luidde: 4 minuten (!).

De andere vraagstukken die ook alle oplossingen te zien gaven, waarbij maar iets met de gegeven getallen gedaan werd, laat ik nu achterwege.
Het vraagstuk werd door verschillende deelnemers van de werkgroep in de klassepraktijk her-

haald. Het resultaat was onthullend en teleurstellend. In één klas kwamen 24 van de 30 leerlingen met foute antwoorden, zoals: 4 minuten, 4 uur en 1296 (72x18) minuten of uren (!).
De ontsteltenis onder de werkgroepsleden, onderwijsgevenden uit BO en VO, was groot. De klachten van de VO-docenten dat er te weinig aandacht zou bestaan in het BO voor de rekenvaardigheid, verbleekten toen men de rijen en rijen sommen zag waarmee de kinderen dag in dag uit oefenen.
Maar ook de BO-docenten waren verbaasd dat hun eindeloze inspanningen de kinderen het rekenen bij te brengen zo weinig effect bleken te hebben, wanneer er een eenvoudige toepassing werd gevraagd.
Dit ene voorbeeld tijdens bedoelde BOVO-cursus gaf meer reden om over vorm en inhoud van het reken/wiskunde-onderwijs na te denken dan theoretische uiteenzettingen over doelstellingen, eindtermen, leertheorieën, etc.
Ik zal proberen deze realistische aanpak, ook hierna, te blijven volgen.

Het aansluitprobleem

Voor rekenen/wiskunde is het aansluitprobleem levensgroot. Er gaapt een immens gat tussen het rekenen op de lagere school en de wiskunde van de brugklas. Er valt geen enkele continuïteit te ontdekken tussen de sommen over procenten, breuken, decimale getallen en verhoudingen op de lagere school en de wiskunde in het VO met verzamelingen, letterrekenen en spiegelen. Op vele scholen voor VO wordt op het rekenen niet teruggekomen. In feite wordt verondersteld dat de 'lagere schoolstof' afgerond is, door leerlingen gekend wordt en niet vergeten. Op z'n vroegst wordt op rekenen pas weer een beroep gedaan aan het eind van de brugklas, wanneer lineaire vergelijkingen met gebroken coëfficiënten aan de orde komen. Dan worden vaak klachten gehoord als: 'de leerlingen hebben geen rekenvaardigheid, een gebrekkig getalbegrip en te gering inzicht in de bewerkingen.' Nog sterker wordt gebrek aan rekenvaardigheid ervaren bij de natuurkundelessen in het tweede leerjaar en bij andere vakken, waar gerekend moet worden zoals bij handelskennis en aardrijkskunde.

Rekenen is ook wiskunde

Er wordt veelal een onderscheid gemaakt tussen rekenen en wiskunde. Vooral in Nederland wordt deze tweedeling benadrukt. Op de universiteit of Nieuwe Lerarenopleiding word je opgeleid tot wiskundeleraar. Op de pedagogische academie kun je onderwijzer, zoals dat nu nog steeds heet, worden en daar leer je dan ook hoe je rekenen moet onderwijzen. Dit ondanks het feit dat men

BO: Rekenen!

1 *Vermenigvuldigen.*

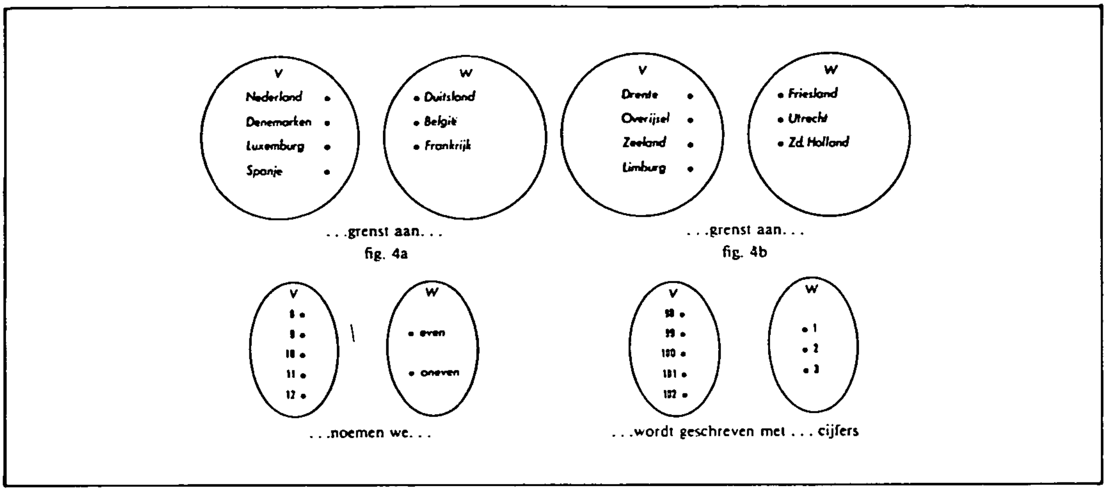
0,125 3 ×	0,375 2 ×	3.875 4 ×	3,056 5 ×	1,009 9 ×
2,6 16 ×	4,7 × 12 ×	0.27 15 ×	0,345 18 ×	8,375 24 ×

2 *Onder elkaar.*

3 × 1,37 =	8 × 7,7 =	12 × 0.25 =	16 × 3,465 =
5 × 8.25 =	6 × 0.045 =	16 × 3.16 =	45 × 4,9 =
8 × 9,7 =	9 × 2.862 =	25 × 7.275 =	215 × 8,15 =
7 × 0.345 =	7 × 0.24 =	38 × 0,006 =	24 × 9,765 =

3 *Onder elkaar.*

ƒ 14.37 + ƒ182 − ƒ 0.75 =	21,8 − 3.456 =
ƒ 8.05 − ƒ 10.10 − ƒ 25 =	375 − 0.375 =
ƒ 0.83 − ƒ 2.75 − ƒ200 =	9,7 − 3.458 =
ƒ219.58 − ƒ 5.07 + ƒ 0.05 =	162.5 − 1.625 =



VO: Maak pijldiagrammen van relaties van V naar W. Zijn de relaties functies?

op de meeste PA's al sinds jaren over wiskunde en didactiek spreekt.
De wiskundeleraar heeft in zijn opleiding over het algemeen weinig of niets van rekendidactiek gezien. Maar hij/zij wordt door de onderwijzer van de basisschool, die meestal weinig van de wiskunde van het VO weet, wel als de expert gezien, die weet te bepalen wat de kinderen allemaal moeten kennen en kunnen of tot het echte werk toegelaten te kunnen worden. Rekenen wordt daarbij vaak beschouwd als iets dat je even onder de knie moet krijgen, dus zoiets als fietsen of autorijden.
Dit komt voort uit de gedachte dat rekenen slechts een verzameling, een aantal blinde algoritmen zou zijn. (Een algoritme is een vast voorschrift, dat altijd tot het gewenste resultaat leidt en dat ook zonder begrip uitgevoerd kan worden. Denk bijvoorbeeld aan de staartdeling.)
Dit is een misvatting waarvan men zou kunnen hopen dat ook onderwijsgevenden uit het BO hem zouden kunnen bestrijden.
De wiskunde begint bij het getal. De mens is zo inventief geweest om voor het noteren en rekenen met getallen een slim systeem te bedenken. Dit systeem, ook wel tiendelig positiestelsel genoemd, is gebaseerd op twee principes:

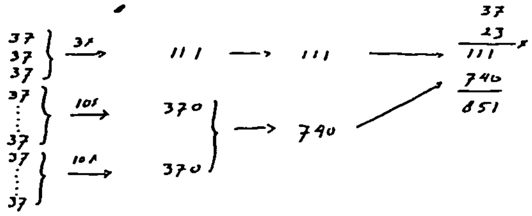
1 telkens worden groepjes van tien gebundeld en als volgt ingewisseld:
  tien eenheden ----- één tiental
  tien tientallen ----- één honderdtal etc.
2 het toekennen van een waarde aan een plaats (positie) van een cijfer in een getal

$$723 = 700 + 20 + 3$$

H	*T*	*E*
7	2	3

De 3 geeft voor z'n positie de eenheden (E) aan, de 2 de tientallen (T) en de 7 de honderdtallen (H).
Dit positiesysteem, dat ook de kommagetallen omvat, is de basis van ons getallen- en rekensysteem. Hierin inzicht verwerven, maar ook het inzichtelijk leren opereren in dit systeem leidt tot echte mathematische activiteiten.
Zo kan de beschouwing van de vermenigvuldiging 23 x 37 vanuit de oorspronkelijke betekenis 37 +37+37+37+... 37 (23 maal) via steeds verdergaande verkortingen het inzicht in het standaardalgoritme (her)bewust maken. Let hierbij vooral op de belangrijke x10 eigenschap, waardoor de cijfers in positie naar links verschuiven en een nul op de plaats van de eenheden verschijnt.

23 x 37



Van herhaald optellen naar standaardalgoritme.

Naast het cijferen is het toepassen van het rekenen, zoals bij de redactie-opgaven maar ook bij het meten en het maken van grafieken, een stapje hoger in de wiskunde.

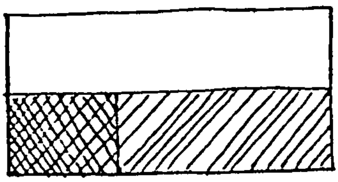
Inzicht en vaardigheid

Opnieuw een BOVO-vraag:

Kleur de helft.

Arceer daarvan $\frac{1}{3}$ *deel.*

Vul in: $\frac{1}{3}$ *deel van* $\frac{1}{2}$ *deel = ... deel.*



Een brugklasleerling (havo/vwo) doet dit foutloos. Als hem daarna gevraagd wordt

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$

uit te rekenen, gaat dit als volgt:

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{6}{6} = 1$ (!).

En de vraag of hij overeenkomst ziet tussen het verdeelvraagstuk en het breukensommetje, levert als antwoord op: 'Het gaat allebei over breuken.' (!)

Dergelijke kleine steekproeven in de brugklas over de kennis van het rekenen leiden tot de conclusie dat de klachten hierover niet altijd onterecht zijn. In een ideaal reken/wiskundeprogramma zou inzicht voorop moeten staan. Wanneer de kinderen een bepaalde vaardigheid inzichtelijk hebben verworven, zou deze ook verder inzichtelijk geoefend moeten worden. Dit betekent niet, dat er op een bepaald moment niet automatisch gecijferd zou kunnen worden, maar in principe zou men altijd naar de bron van het inzicht moeten kunnen terugkeren.
Zo zou men zich kunnen voorstellen dat de staartdeling aan de hand van een context inzichtelijk aangeleerd wordt, dus werkelijk als herhaalde aftrekking, waarbij we een aantal niveaus van verkortingen kunnen onderscheiden:

Van herhaald aftrekken naar standaardalgoritme.

Er gaan 1572 supporters mee naar Ajax-Anderlecht. In elke bus gaan 48 personen.

1572	→ 1572	→ 1572	→ 48/1572\30+2
48 −	480 − 10x	960 − 20x	1440
1524	1092	612	132
48 −	480 − 10x	480 − 10x	96
1476	612	132	36
48 −	480 − 10x	96 − 2x	
1428	132	36 ↓	
48 −	96 − 2x	32x	
⋮	36 ↓		
	32x		

Deze verkortingen kunnen langzamerhand door de kinderen zelf verworven worden. Steeds houd je in de gaten wat het delen precies betekent. En het gaat tenslotte niet meer om het delen op zich, elke staartdeling kan tenslotte met een zakrekenmachine uitgevoerd worden. Belangrijk daarbij is juist, dat je het antwoord vooraf kunt schatten en weet wat het delen betekent. In dit geval 32 x 48+36=1572.

Nu is het aantal aan te leren vaardigheden voor het basisonderwijs vrij groot. En men werkt met heterogene groepen, waarin de zwakkere leerlingen maar voort moeten om alle eindtermen te halen. En juist die zwakkere leerling komt vaak niet verder dan de staartdeling. Kommagetallen, breuken en procenten worden op die manier en voor leerling en voor onderwijsgevende een martelgang.
Toch rekent men er in het VO nog steeds op dat alle kinderen *alles* gehad hebben en beheersen. Dit legt een fikse druk op het basisonderwijs. Als gevolg wordt tegen het einde van de basisschool hoofdzakelijk gewerkt op het aanleren van blinde algoritmen. Vooral de breukenleergang is dan meestal niet meer dan een labyrinth van onbegrepen recepten. Soms levert dit nog wel enkele schijnresultaten op maar helaas worden dan in een later stadium, vooral door de zwakkere leerlingen allerlei regels door elkaar gehaald.

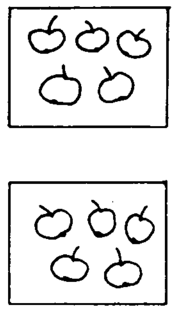
Rekenen, een algoritmische aanpak

Als gevolg van de scheiding van rekenen (BO) en wiskunde (VO) blijft de leerstof een dwingend harnas voor het BO. Komt daar nog eens bij, dat de differentiatie en individualisering een hoge prioriteit in de onderwijsorganisatie genieten, dan is het begrijpelijk dat er naar methoden wordt gezocht de leerstof in zo overzichtelijk mogelijke leerstappen te ordenen.
Nu lijkt rekenen daar bij uitstek geschikt voor. Logisch-wiskundig is dat juist. De samenhang tussen optellen en aftrekken laat de ene operatie uit de andere volgen. Uit herhaald optellen volgt vermenigvuldigen, delen is niets anders dan herhaald aftrekken.
Zo simpel is dat.
Maar wat logisch-wiskundig zo gestructureerd is, hoeft in psychologische zin niet aan dezelfde wetten te gehoorzamen. Bekijk bijvoorbeeld eens de twee volgende vraagstukjes:

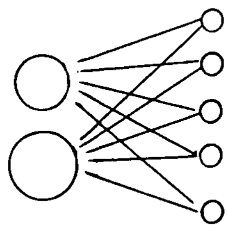
Een doosje bevat 5 appels. Hoeveel in 2 dozen?

Een sportfiets heeft voor 2 bladen, achter 5 raderen. Hoeveel verschillende versnellingen?

Het appelvraagstukje levert 5 x 2 appels op. Je ziet ze zo voor je.
Maar bij het tellen van het aantal versnellingen ligt de vermenigvuldigingsstructuur in het geheel niet zo voor de hand:



2 x 5 appels



2 x 5 versnellingen

Toch zou men nog kunnen geloven dat ook al dergelijke toepassingsvraagstukken te systematiseren zijn. En dan gebeurt wat zich in een groot deel van onze scholen afspeelt. De leerstof wordt in vraagstukken soort bij soort opgedeeld, steeds verder gefragmenteerd en ... het onderwijs, zo men daar nog van kan spreken, voltrekt zich hoofdzakelijk schriftelijk.
De kinderen krijgen aldoor maar pagina's vol met dezelfde sommen voorgeschoteld. Vrijwel steeds wordt zo snel mogelijk op een algoritme, dat succes op korte termijn kan verzekeren, aangestuurd. Er is een dwingende werkwijze, welke elk eigen initiatief tegengaat. Een flexibele houding kan zo niet ontstaan, zelfs bevordert deze aanpak een a-wiskundige attitude. De kinderen worden systeemafhankelijk en blijken het geleerde in een

andere setting niet te kunnen toepassen.
De onderwijsgevende wordt tot administrateur gedegradeerd. Bij de zwakkere leerlingen kan hij/zij essentiële fouten niet meteen boven water halen, omdat de kinderen op grond van hun te geringe scores volgens het organisatiemodel meteen naar een lager niveau worden gedirigeerd.
En doordat de leerlingen aldoor maar schriftelijk in lussen door de stof gestuurd worden en alsmaar op dezelfde sommen oefenen kan het zijn dat sommige leerlingen vanaf een bepaald punt nooit meer verder komen. De motivatie tot rekenen is dan meestal wel helemaal tot nul gereduceerd.

Wiskunde: voordoen, nadoen

Na het basisonderwijs worden de kinderen in hun hokjes geplaatst: *lbo, mavo, havo/vwo*. Op al die scholen wordt wiskunde gegeven, soms nog wat rekenen.
Ook in het VO bestaat er een grote belangstelling voor gedifferentieerd onderwijs met de bijbehorende individuele werkvormen. Ook dat gebeurt grotendeels schriftelijk.
Helaas geven die schoolboeken, die rekenboeken heten te zijn voor het VO weinig hoop dat er naar een zinvoller reken/wiskunde-onderwijs toegewerkt zou worden.

STAAN ER GEHELE GETALLEN VOOR DE BREUK, DAN DEZE EERST ERUIT HALEN.

omgekeerde

$$\frac{3}{8} : 2\frac{1}{4} = \frac{3}{8} : \frac{9}{4} = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{8}_{2}} \times \frac{\cancel{4}^{1}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

Maak de sommen volgens voorbeeld.

$\frac{5}{8} : 3\frac{1}{4} =$

$\frac{1}{2} : 5\frac{1}{4} =$

$\frac{1}{8} : 3\frac{1}{4} =$

$\frac{1}{3} : 1\frac{7}{9} =$

$\frac{7}{8} : 1\frac{1}{4} =$

Ook hier treffen we weer dezelfde nadruk op algoritmische vaardigheden, die op een soortgelijke wijze worden aangeboden als in het basisonderwijs.
Waar met wiskunde gestart wordt, zien we veelal de methode voordoen en nadoen gehanteerd:

VOORBEELDEN

1 $(x + 5)(x + 6) = x^2 + (5 + 6)x + 30 = x^2 + 11x + 30$

2 $(x - 3)(x + 7) = x^2 + 4x - 21$, want $-3 + 7 = 4$ en $-3 \cdot 7 = -21$

3 $(a + 6)(a - 8) = a^2 - 2a - 48$

4 $(p - 9)(p - 11) = p^2 - 20p + 99$

5 $(x + 3y)(x - 6y) = x^2 - 3xy - 18y^2$

Bereken:

1 a. $(x + 10)(x + 4)$	e. $(x + 10)(x - 8)$
b. $(x + 7)(x + 3)$	f. $(x - 7)(x + 9)$
c. $(x + 9)(x + 1)$	g. $(x + 16)(x - 5)$
d. $(x + 5)(x + 12)$	h. $(x + 7)(x - 8)$
2 a. $(a + 4)(a - 13)$	e. $(x + 2y)(x - 3y)$
b. $(a - 5)(a + 19)$	f. $(x + 7y)(x + 4y)$
c. $(a - 15)(a - 14)$	g. $(x - 11y)(x + 6y)$
d. $(a - 8)(a - 9)$	h. $(x - 15y)(x - 3y)$

De geschiedenis herhaalt zich: ook hier weer een enorme nadruk op algoritmen, die nauwelijks toegepast kunnen worden, zo ze al toe te passen zijn.
Er is één groot verschil met het BO. Voor veel kinderen houdt deze martelgang na drie jaar op, wanneer ze wiskunde kunnen laten vallen. Niet zelden komen dergelijke leerlingen later op een PA en moeten daarna zelf rekenen gaan onderwijzen.

Oorzaken discontinuïteit

Er zijn tal van oorzaken te noemen voor het ontstaan van de discontinuïteits-gap binnen BO en VO. Ik som er een aantal op zonder volledig te willen zijn:
— De tijd dat kinderen tot dertien jaar schoolplichtig waren is nog niet zo lang geleden. Voor velen hield daarmee het onderwijs op, of je nu wel of geen breuken kon optellen.
— We zitten nog steeds met een traditionele leerstofordening, welke in feite berust op het oude koopmansrekenen.
— Hoewel niet door de overheid bepaald, kunnen we toch van min of meer dwingende eindtermen spreken.
— Omdat de eindtermen de inhoud van de leerboeken bepalen, verstarren deze leerboeken.
— Er is binnen BO en VO weinig kennis van elkanders vakgebied.
— Het rekenonderwijs wordt vaak als een techni-

sche aangelegenheid gezien. Het is produktgericht: je moet alleen vlot en vaardig kunnen cijferen. Daardoor is er te weinig ruimte voor begripsvormende activiteiten en vooral voor het ontwikkelen van een wiskundige attitude.

— Het wiskunde-onderwijs in het VO laat de mogelijkheden om aan te sluiten bij datgene waar men op de lagere school is gestopt, liggen. In het algemeen wordt er in het VO op een veel abstracter niveau ingestapt, waarbij de rekenkennis van het basisonderwijs ternauwernood nog een rol van betekenis speelt.

— Er wordt te geringe aandacht besteed aan de didactiek van dit gebied zowel in de opleiding als de nascholing.

— Er is nog geen praktisch werkbaar systeem ontwikkeld om het differentiatieprobleem op te lossen.

Aanzetten tot oplossingen

Er kan — het is al eerder opgemerkt — geen forse stap tot oplossing van de aansluitproblematiek gemaakt worden, indien de leerstof voor rekenen/wiskunde (4- tot 14-jarigen) niet opnieuw geordend wordt. Dit zou vooral nodig zijn om iets aan het differentiatieprobleem te kunnen doen. Immers, het gaat in hoofdzaak om de zwakkere leerlingen, die juist het rekenen zo nodig hebben. Tevens zouden de betere leerlingen al vroeger voor uitdagender problemen dan de afgetrapte sommenrijtjes van de meeste huidige leerboeken gesteld kunnen worden.

Hoewel een dergelijke leerstofordening nog op geen enkele wijze in het verschiet ligt, kunnen er ook thans verbeteringen aangebracht worden als de reken/wiskundeproblematiek vanuit de didactische hoek aangepakt zou worden.

Ik noem hier enkele mogelijkheden allereerst voor het rekenonderwijs op *de basisschool*:

— Er zou minder nadruk op het schriftelijk rekenen moeten komen te liggen. Zorg dat de kinderen vooral goed uit het hoofd kunnen rekenen en schattingen kunnen maken. Bevorder hun eigen rekenwijzen, want het is maar een idee, dat het leerproces zich zou moeten voltrekken zoals wij volwassenen dat uitgedacht hebben.

Vraag hoe 48 + 35 uitgerekend wordt en je zult versteld staan:

48+35=78+5=83

48+35=50+33=83

48+35=50+40−2−5=

48+35=45+35+3=

Tracht zoveel mogelijk een flexibel rekengedrag te doen ontstaan. Dit kan alleen door de verschillende aanpakken met de kinderen te bespreken.

24 x 39=39 x 24=40 x 24 - 24=960 - 24=936

24 x 39=12 x 78=6 x 156=3 x 312=963. Dit soort rekenpraatlessen zijn geen hoofdrekenlessen in de ouderwetse zin van het woord. Het gaat om de reflecties op de verschillende oplossingsmethoden naar aanleiding van een eenvoudige rekenopgave.

Wie bijvoorbeeld bij de opgave 10 x 2,4 automatisch tot het onder elkaar cijferen terugvalt (dit gebeurt echt!)

```
 2,4
 10
 ——— x
 00
240
———
24,0
```

zou opnieuw bewust gemaakt moeten worden van de x 10 eigenschap. Wie bij 10.000 - 1 een aftrekking onder elkaar gaat maken, zou op de ordening van de getallen gewezen kunnen worden.

De bedoeling van dit soort lessen is het ontwikkelen van een goed gevoel voor getallen en voor het opereren met getallen.

Ga ook eens van één getal uit.

Bedenk zoveel mogelijk over 72.

Het vergelijken van de verschillende vondsten van de kinderen kan een openbaring zijn:

72 is even

72=2 x 36=3 x 24=8 x 9 ...

72 is deelbaar door 2; 3; 9; ...

72=70+2=36+36 ...

etc. etc.

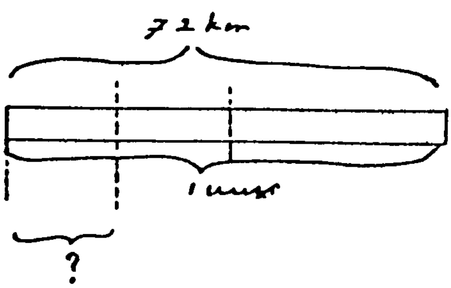
Kortom, doorbreek het systeem van het louter schriftelijk rekenen en tracht van het rekenen een meer sociale bezigheid te maken.

— Er kan veel meer aandacht besteed worden aan begripsmatige zaken, alvorens tot algoritmisering over te gaan. Er zijn door het voormalige IOWO (afdeling Wiskobas) leergangen voor het cijferen ontwikkeld die bewezen hebben dat dit mogelijk is, hoewel het niet gemakkelijk is zo'n leergang in een traditionele methode te plaatsen.

— Rekenen betekent niet dat er louter en alleen met getallen gewerkt wordt.

Visualiseren en modellen zijn een krachtig hulpmiddel voor het rekenen en de wiskunde. Zij zijn

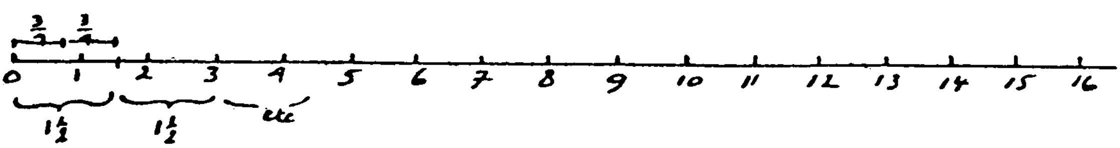
als het ware een verbinding tussen de gewone taal en de formele (wiskunde-)taal. Daarom zou het gebruik van visualiseringsmiddelen, zoals de getallenlijn en het honderdveld en modellen zoals de strook en het verhoudingsblok, veel meer aandacht verdienen.
Laten we nog een keer terugkeren naar het sommetje uit de inleiding:
Een auto rijdt met een snelheid van 72 km per uur. Hoe lang rijdt hij over 18 km?
Stel, dat de leerling hierbij een strook, waaraan hij twee grootheden (afstand en tijd) kan koppelen tot zijn beschikking had gehad:



Welk een eenvoud en wat een heldere oplossingswijze!
Of beschouw de volgende context:

Telefoneren tussen twee zones kost 16 cent per 3/4 minuut.
Hoeveel kost een telefoongesprek van een kwartier tussen Amsterdam en Maastricht?

Je wordt niet gedwongen tot ingewikkelde breukdelingen als je de tijdlijn ziet aflopen en daarop de 3/4 minuten afpast:



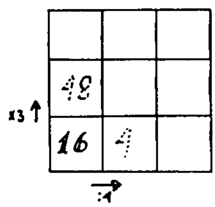
Vier 3/4 minuten vullen drie minuten. Er gaat dus twintig keer een 3/4 minuut in vijftien minuten. Je ziet het zo.

Verhoudingen worden in het BO maar magertjes en geïsoleerd aangeboden. Toch kan dit onderdeel, vooral naar de toepassingen toe, veel rijker uitgewerkt. Het verhoudingsblok is daartoe een uitermate geschikt model.

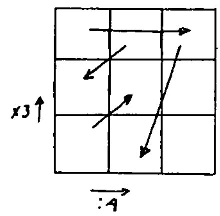
De Franse franc kost vandaag Hfl. 0,40.
Hoeveel francs krijg je voor fl. 150,-?

FRANCS	1	10	100	200	50	250	125	275
GULDENS	0,4	4	40	80	20	100	50	150

— Het oefenen kan niet alleen speelser aangeboden, de verschillende gevarieerde oefenvormen, die gedurende de laatste decennia zijn ontwikkeld, openen ook mogelijkheden tot het zien van verbanden, soms zelfs tot wiskundige activiteiten. Bekijk daartoe eens de volgende pijlendiagramvraagstukken: /



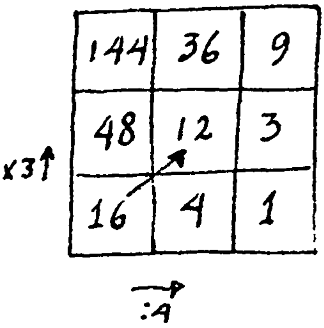
Vul in



Wat betekenen de pijlen?

Het eerste diagram kan als oefening ingevuld worden. Elke stap horizontaal naar rechts betekent :4, verticaal naar boven x3.

Aldus ontstaat de volgende invulling:



Het interessante is nu dat we via twee routes van 16 naar 12 kunnen komen:

$$16 \xrightarrow{x3} 48 \xrightarrow{:4} 12$$

of:

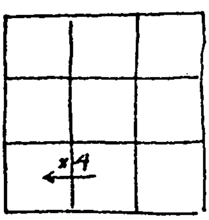
$$16 \xrightarrow{:4} 4 \xrightarrow{x3} 12$$

We zien dus dat de volgorde van deze twee bewerkingen kennelijk niet van belang is. Vragend naar de betekenis van de schuine pijl kunnen we opmerken dat de twee bewerkingen tot één bewerking samengesteld kunnen worden:

$$16 \xrightarrow{x\frac{3}{4}} 12$$

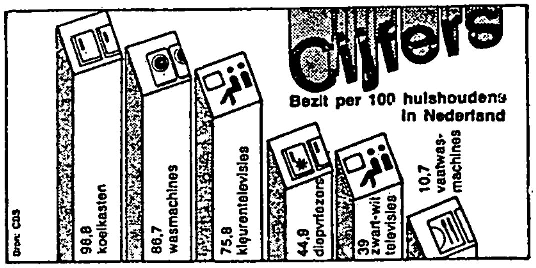
We zien hieraan hoe het vermenigvuldigen van een geheel getal met een breuk eenvoudig opgesplitst kan worden in een vermenigvuldiging gevolgd door een deling of omgekeerd. Wellicht werpt dit een nieuw licht op de zogenoemde wegstreepregel:

$$\frac{3}{\underset{1}{\cancel{4}}} \times \overset{4}{\cancel{16}} = 12$$



Door het omkeren van een ':4 pijl' ontstaat de 'x4 pijl'. Zo wordt de samenhang tussen vermenigvuldigen en delen als elkaars omgekeerde bewerkingen aan de orde gesteld. Het zal niet moeilijk zijn nu ook de betekenissen van de andere pijlen te vinden.

— Er zou een grotere zingeving voor het rekenonderwijs kunnen ontstaan als er meer aandacht besteed werd aan toepassingen. Men kan daarbij denken aan actuele gebeurtenissen, maar ook aan meetpractica of projecten. Heel wat van dergelijke aanpakken zijn beschreven in een aantal Wiskobas-publikaties.

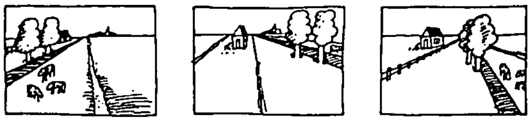


Zo is het mogelijk naar aanleiding van dit krantebericht het procentbegrip nog eens grondig aan de orde te stellen. Het procentrekenen is een bij uitstek toepasbaar onderdeel van het reken/wiskundeonderwijs (ook in het VO). Helaas komt dit onderwerp aan het eind van de basisschool dusdanig in de verdrukking, dat veel kinderen daardoor geen idee hebben van procenten, laat staan dat ze ermee kunnen rekenen. Juist allerlei kranteberichten zijn heel geschikt om het nut van procenten te verhelderen. Bovendien bieden dergelijke berichten ook aanknopingspunten voor problemen van algemener aard.

Blijven we bij de reken/wiskundige problematiek, dan biedt dit bericht ook mogelijkheden allerlei leuke denkvragen te stellen, zoals: Kun je iets zeggen over het percentage van de huishoudens dat zowel een kleurentelevisie als een zwart-wit televisie bezit? (tenminste 14,8 procent).

En hoe staat het met het percentage huishoudens waar helemaal geen televisie voorkomt? (ten hoogste 24,2 procent).

— Tenslotte zou het BO ook niet hoeven te schromen enkele wiskundige elementen aan het rekenonderwijs toe te voegen. Heel geschikt daartoe is onder meer 'Zie je wel', een pakketje informele meetkunde. De omgeving verkennend leren de kinderen essentiële begrippen over rechte lijnen en het afbeelden van de ruimte op foto's en tekeningen. De kinderen worden daarbij uitgedaagd de verschijnselen te verklaren door middel van taal:



Drie tekeningen van 't landschap gezien uit een rijdende trein.
De trein rijdt in deze richting ⟶

Wat is de goede volgorde van de tekeningen?

Het begrijpen van de ons omringende ruimte, in casu het veranderende beeld vanuit een rijdende trein, is aldus een voorbeeld van echte realiteitsgebonden meetkunde.
De algemene strekking van voornoemde punten kan men ook van toepassing laten zijn op het *wiskunde-onderwijs in het VO*. Ook hier zou dienen te gelden:
— minder nadruk op schriftelijk werk, meer aandacht voor reflectie op eigen en andermans leren
— minder nadruk op louter algoritmisch werken, meer aandacht voor begripsverwervende activiteiten;
— grotere aandacht voor visualiseringen en modelgebruik;
— meer variatie in oefeningen;
— meer aandacht voor toepassingen.
Bovendien zou het VO mee kunnen werken aan een aanzet tot oplossing van het aansluitingsprobleem door aandacht te schenken aan de volgende zaken:
— voortzetting van het rekenen in het VO. Het onderhouden van de rekenvaardigheid;
— herbewustmaking van vroeger geleerde zaken (positiestelsel, vermenigvuldiging en staartdeling, samenhang breuken binnen kommagetallen en verhoudingen etc.);
— wiskundige activiteiten starten vanuit rekenproblemen;
— integratie met andere vakken, zoals aardrijkskunde en natuurkunde.

Nu is dit allemaal gemakkelijk neergeschreven. In de praktijk blijkt men tegen tal van praktische moeilijkheden op te lopen, zoals:
— beschikbaarheid van materiaal;
— inpassingsproblemen in het programma (onderwijstijd);
— organisatorische kwesties (docententijd).
Daarbovenop komt de noodzaak van gezamenlijke studie. Dit is ons gebleken tijdens de BOVO-cursus te Amersfoort. Op deze cursus zijn wij, allen werkzaam op het gebied van het reken/wiskundeonderwijs zowel in het BO als alle typen van het VO tot een aantal constateringen gekomen welke in het voorgaande zijn neergelegd.
De bevinding dat het niveau van de leerlingen aan het eind van de basisschool enorm varieert, heeft ons ertoe gebracht ook aan het rekenen in het VO aandacht te blijven besteden.
Er zijn thans enkele experimentele leergangetjes van een remediërend karakter ontwikkeld op het gebied van breuken, kommagetallen, procenten, verhoudingen en schaal.
Voor het BO zijn aanwijzingen voor de onderwijsgevende beschreven met het doel de verhoudingstabel als didactisch hulpmiddel te gaan gebruiken.
De studie over verhoudingen, een onderwerp dat niet alleen vele onderwerpen van het rekenen bindt, maar ook van groot belang is voor de wiskunde, natuurkunde, scheikunde en aardrijkskunde blijft een belangrijk item.
Naast het rekenkundige aspect wordt ook getracht wat meer wiskundige elementen aan het onderwijs toe te voegen. De meetkundige onderwerpen, zoals het eerder genoemde 'Zie je wel' en 'verpakkingen' blijken daartoe voor de basisschool heel geschikt. Ook wordt onderzocht in hoeverre andere werkvormen (groepswerk) uitvoerbaar zijn.

De problematiek in z'n totaliteit (naast rekenen/wiskunde zijn ook groepen voor taal, zaakvakken en expressie bezig) is nog lang niet opgelost. En dan te bedenken dat we al bijna drie jaar bezig zijn. Wij hopen nog enige tijd te kunnen doorgaan.

Wil men de aansluiting echt plaats doen vinden, dan zijn goede samenwerkingsverbanden — het liefst ondersteund door deskundigen — een eerste voorwaarde. Dit kost tijd, moeite en geld, maar het zou het ten volle waard zijn, omdat het gaat om een zo grote groep van leerlingen die in een zo kritieke fase van hun leven zijn.
Leerplanmakers voor het komende voortgezet onderwijs: let op deze zaak!